

DS n°1, mathématique

Durée : 2 heures

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.

L'usage de tout outil électronique est interdit.

Le sujet comporte 2 pages, et est constitué de deux problèmes indépendants.

Problème 1 : Tirages successifs dans une urne

Soit $(c_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers naturels non nuls. Dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire, on effectue une suite de tirages de la façon suivante : on tire une première boule et

- si la boule obtenue est noire, on s'arrête définitivement

- si la boule obtenue est blanche, elle est remplacée dans l'urne avec en plus c_1 autres boules blanches puis on procède au tirage suivant.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, si les $n - 1$ premiers tirages ont donné une boule blanche, on procède au n -ième tirage :

* si la boule obtenue est noire, on s'arrête définitivement

* si la boule obtenue est blanche, elle est remplacée dans l'urne avec en plus c_n autres boules blanches.

On poursuit ainsi jusqu'à obtenir une boule noire, si on finit par en obtenir une, ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule noire.

Pour tout entier naturel non nul n , on définit les événements :

B_n : « le n -ième tirage a lieu et donne une boule blanche »

E_n : « on s'arrête d'effectuer des tirages à l'issue du n -ième tirage »

F_n : « on obtient une boule blanche à chacun des n premiers tirages »

et on pose $p_n = \mathbf{P}(E_n)$ et $q_n = \mathbf{P}(F_n)$. Enfin, on définit l'événement G : « on s'arrête d'effectuer des tirages ».

1. Expression de $\mathbf{P}(G)$

(a) Exprimer l'événement G à l'aide des événements E_n .

(b) Justifier que la série de terme général p_n converge, et que sa somme vaut $\mathbf{P}(G)$.

(c) Étudier la monotonie de la suite $(q_n)_{n \geq 1}$. En déduire qu'elle converge vers une limite ℓ appartenant à $[0, \frac{1}{2}]$.

(d) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer l'événement $\overline{F_n}$ à l'aide des événements E_k pour $k \in \mathbf{N}^*$.

(e) En déduire que $\mathbf{P}(G) = 1 - \ell$.

2. Étude du cas général.

(a) Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs.

Justifier que les séries de termes généraux $\frac{1}{u_n}$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$ sont de même nature.

On distinguera deux cas : (u_n) diverge vers $+\infty$, ou non.

On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = 1 + \sum_{k=1}^n c_k$.

On constate que, si B_n est réalisé, alors u_n est le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du n -ième tirage.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer F_n à l'aide des événements B_k pour $k \in \mathbf{N}^*$ et en déduire une expression de q_n sous la forme d'un produit qu'on ne cherchera pas à calculer.

(c) Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ln(q_n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{u_k}\right)$$

(d) En déduire que G est quasi-certain si, et seulement si, la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge.

3. Applications à plusieurs cas particuliers.

Pour chacun des exemples suivants, dire si G est un événement quasi-certain ou non.

(a) La suite $(c_n)_{n \geq 1}$ est définie par : $\forall n \geq 1, c_n = 1$.

(b) La suite $(c_n)_{n \geq 1}$ est définie par : $\forall n \geq 1, c_n = 2n + 1$.

(c) La suite $(c_n)_{n \geq 1}$ est définie par : $\forall n \geq 1, c_n = 2^{n-1}$.

Problème 2 : un développement en série du logarithme

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces, et d'une urne contenant initialement une boule blanche. On effectue une succession infinie de lancers du dé : à chaque fois que le dé amène un résultat différent de 6, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Si on finit par obtenir un 6, alors la première fois que cela arrive, on pioche aléatoirement une boule de l'urne.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les événements :

S_n : « on obtient 6 au n -ième lancer ».

T_n : « on obtient 6 pour la première fois au n -ième lancer ».

1. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer l'événement T_n à l'aide des événements S_k pour $1 \leq k \leq n$.
(b) En déduire la probabilité de T_n pour tout $n \geq 1$.
(c) Montrer que la série de terme général $(\mathbf{P}(T_n))_{n \geq 1}$ converge, et que sa somme vaut 1.
Que dire alors des événements $(T_n)_{n \geq 1}$?
(d) Soit $n \geq 1$. Déterminer la probabilité de l'événement :

A_n : « on a obtenu un 6 au plus tard au n -ième lancer ».

2. (a) Soit t un réel tel que $t \neq 1$, et soit n un entier naturel non nul.

Calculer : $\left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) - \frac{1}{1-t}$.

- (b) Soit x un réel tel que $0 \leq x < 1$.

En intégrant sur $[0, x]$ le résultat trouvé à la question précédente, montrer que :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

- (c) On pose : $I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

Montrer que : $\forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$.

En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = 0$.

- (d) En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge, et que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

3. On pose l'événement B : « on finit par obtenir un 6 et la boule piochée est la boule blanche ».
Déterminer la probabilité de B .

Indication : utiliser pour commencer le résultat de la question 1.(c)

* * * FIN DU SUJET * * *