

Corrigé du DS n°1

Problème 1 : Tirages successifs dans une urne

1. Expression de $\mathbf{P}(G)$

- (a) Par définition de l'événement G et des événements E_n pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$$

- (b) $(E_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles. La σ -additivité assure que la série de terme général $\mathbf{P}(E_n)$ converge et que sa somme vaut $\mathbf{P}(G)$.

La série $\sum p_n$ est convergente et sa somme est égale à $\mathbf{P}(G)$.

- (c) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Obtenir une boule blanche à chacun des $(n+1)$ premiers tirages implique d'obtenir une boule blanche à chacun des n premiers tirages. En d'autres termes, $F_{n+1} \subset F_n$, ce qui donne $q_{n+1} \leq q_n$ en passant aux probabilités.

La suite $(q_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Étant décroissante et minorée par 0, la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ est convergente. Soit ℓ sa limite.

Puisque $\forall n \in \mathbf{N}^*, 0 \leq q_n \leq q_1 = \frac{1}{2}$, on a par passage à la limite :

la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ est convergente et sa limite ℓ appartient à $[0, \frac{1}{2}]$.

- (d) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'événement $\overline{F}_n$ signifie qu'on a obtenu une boule noire au plus tard au n -ième tirage.

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbf{N}^*, \overline{F}_n = \bigcup_{k=1}^n E_k.$$

- (e) L'événement $\overline{F}_n$ s'écrit comme union d'événements deux à deux incompatibles, donc :

$$\mathbf{P}(\overline{F}_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(E_k) \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1 - q_n = \sum_{k=1}^n p_k.$$

D'après la question 1.(b) et par définition de ℓ :

$$\mathbf{P}(G) = 1 - \ell.$$

2. Étude du cas général.

- (a) Premier cas : la suite (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$.

Puisque tous les termes de la suite sont positifs, $\frac{1}{u_n}$ ne tend pas vers 0, de même pour $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.

Ainsi, les séries de termes généraux u_n et $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$ sont toutes les deux grossièrement divergentes.

Deuxième cas : la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Alors $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0 et par équivalent usuel : $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \sim \frac{1}{u_n} \geq 0$.

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs :

Les séries $\sum \frac{1}{u_n}$ et $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$ sont de même nature.

- (b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $F_n = B_1 \cap \dots \cap B_n$. D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}(F_n) = \mathbf{P}(B_1) \times \mathbf{P}_{B_1}(B_2) \times \dots \times \mathbf{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{u_1}{1+u_1} \times \dots \times \frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{1+u_k}$$

et puisque $\frac{u_0}{1+u_0} = \frac{1}{2}$, on trouve : $\forall n \in \mathbf{N}^*, q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{1+u_k}$.

- (c) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\ln(q_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{1+u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{u_k}{1+u_k}\right) = - \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{1+u_k}{u_k}\right) = - \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{u_k}\right)$$

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ln(q_n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{u_k}\right).$$

(d) On raisonne par équivalences successives :

$$G \text{ est quasi-certain} \Leftrightarrow \mathbf{P}(G) = 1$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ d'après 1.(e)}$$

$$\Leftrightarrow \lim q_n = 0 \text{ par définition de } \ell$$

$$\Leftrightarrow \lim \ln(q_n) = -\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{u_k}\right) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \sum \ln\left(1 + \frac{1}{u_k}\right) \text{ diverge (car c'est une série à termes positifs)}$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{u_n} \text{ diverge, d'après 1. (car les termes de } (u_n)_n \text{ sont strictement positifs)}$$

Donc : G est quasi-certain si, et seulement si, la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge.

3. *Applications à plusieurs cas particuliers.*

(a) Dans cette question, $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = 1 + \sum_{k=1}^n 1 = n + 1$ donc $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{n+1}$.

On reconnaît le terme général de la série harmonique divergente. D'après la question 3.(c) :

G est un événement quasi-certain.

(b) Dans cette question, $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = 1 + \sum_{k=1}^n (2k+1) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 1 + n(n+1) + n = (n+1)^2$$

Donc $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{(n+1)^2}$ et on reconnaît le terme général de la série $\sum \frac{1}{n^2}$, qui converge. D'après la question 3.(c) :

G n'est pas un événement quasi-certain.

(c) Dans cette question, $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = 1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 1 + \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{u_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique convergente car $|\frac{1}{2}| < 1$. D'après la question 3.(c) :

G n'est pas un événement quasi-certain.

Problème 2 : un développement en série du logarithme

1. (a) $\forall n \geq 1$, T_n est réalisé si, et seulement si on n'obtient pas de 6 au cours des $(n-1)$ premiers lancers, puis un 6 au n -ième lancer. Ainsi :

$$\forall n \geq 1, T_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{S_k} \right) \cap S_n.$$

(b) D'après la question précédente et la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \mathbf{P}(T_n) &= \mathbf{P}(\overline{S_1}) \times \mathbf{P}_{\overline{S_1}}(\overline{S_2}) \times \cdots \times \mathbf{P}_{\overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}}}(S_n) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(\overline{S_k}) \times \mathbf{P}(S_n) \quad \text{par indépendance des lancers successifs} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{5}{6} \right) \times \frac{1}{6} \quad \text{car le dé est équilibré, et on reconnaît un produit de constantes.} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \geq 1, \mathbf{P}(T_n) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$

(c) Les événements $(T_n)_{n \geq 1}$ sont deux-à-deux incompatibles, donc par σ -additivité, la série de terme général $\mathbf{P}(T_n)$ converge.

On a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}$ en posant $p = 1/6$ et $q = 1 - p = 5/6$

$$= p \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad \text{après glissement d'indices}$$

Et on reconnaît la somme d'une série géométrique convergente de raison q :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T_n) = p \times \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1. \text{ Conclusion : } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T_n) = 1.}$$

Par définition, les événements $(T_n)_{n \geq 1}$ forment un système quasi-complet d'événements.

(d) Pour tout $n \geq 1$, $A_n = \bigcup_{k=1}^n T_k$ et cette union est disjointe. Par σ -additivité :

$$\mathbf{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(T_k) = \sum_{k=1}^n pq^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} q^k = p \times \frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n.$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall n \geq 1, \mathbf{P}(A_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.}$$

2. (a) Soit t un réel différent de 1, et soit $n \geq 1$. En reconnaissant une somme géométrique de raison $t \neq 1$:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) - \frac{1}{1-t} = \frac{1-t^n}{1-t} - \frac{1}{1-t} = -\frac{t^n}{1-t}.$$

(b) Soit $x \in [0, 1[$. Les fonctions $t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} t^k$, $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ et $t \mapsto \frac{t^n}{1-t}$ sont continues sur $[0, x]$

$$\text{donc on peut intégrer sur ce segment : } \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k dt - \int_0^x \frac{dt}{1-t} = - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

et par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \quad \text{puis en calculant les intégrales (sauf la dernière)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt. \text{ On conclut par un glissement d'indices :}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.}$$

(c) Pour tout $t \in [0, x]$, $1-t \geq 1-x$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+^*$, on a : $\frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$.

$$\text{On a alors : } |I_n(x)| \leq \int_0^x \left| \frac{t^n}{1-t} \right| dt \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire,}$$

$$\leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt = \frac{1}{1-x} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)} \quad \text{vu ce qui précède, et par calcul.}$$

$$\text{Or } |x| < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0 \text{ et par opérations : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)} = 0.$$

$$\text{On conclut grâce au théorème d'encadrement : } \boxed{\forall x \in [0, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = 0.}$$

(d) Pour $n \geq 1$, on pose $S_n(x)$ la somme partielle de rang n de la série de terme général $\frac{x^k}{k}$:

$$\forall n \geq 1, S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$$

D'après 2.(b), $S_n(x) = -\ln(1-x) - I_n(x)$ et d'après 2.(c), $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = 0$ donc par opérations,

$(S_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers $-\ln(1-x)$. On a montré par définition d'une série convergente que :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0, 1[, \text{ la série de terme général } \frac{x^k}{k} \text{ converge, et que : } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).}$$

3. D'après 1.(c), les événements $(T_n)_{n \geq 1}$ forment un SQCE. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T_n) \times \mathbf{P}_{T_n}(B)$$

Si T_n est réalisé, alors au moment où l'on pioche la boule, l'urne contient 1 boule blanche et $(n-1)$ boules rouges, qu'on a rajouté à l'urne lors des $(n-1)$ lancers précédents. Ainsi, $\forall n \geq 1$, $\mathbf{P}_{T_n}(B) = \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Il vient alors : } \mathbf{P}(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} \times \frac{1}{n} \\
 &= \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{n} \\
 &= \frac{1}{5} \left(-\ln \left(1 - \frac{5}{6} \right) \right) \quad \text{d'après 2.(d) et puisque } q = \frac{5}{6} \in [0, 1[\\
 &= \frac{\ln 6}{5}. \quad \text{En conclusion : } \boxed{\mathbf{P}(B) = \frac{\ln 6}{5}}.
 \end{aligned}$$