Programme de colles
Semaine 6 du 2/11 au 6/11

Variables aléatoires réelles (VAR) discrètes

- Variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
- Loi de probabilité d'une VAR discrète.
- Fonction de répartition : définition, croissance, limites en $\pm\infty$.
- Retrouver la loi de probabilité à partir de la fonction de répartition.
- Moments d'une VAR discrète.
- Espérance d'une VAR discrète : définition, linéarité, croissance.
- Théorème de transfert.
- Variance d'une VAR discrète, $\mathbf{V}(aX+b)$, $\mathbf{V}(X) \geqslant 0$.
- Formule de König-Huygens.
- Écart-type, variable centrée, variable centrée réduite, $X^\star$ variable centrée réduite associée à X.
- Loi certaine, espérance, variance.
- Loi uniforme, espérance de $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
- Loi de Bernoulli, espérance, variance.
- Loi binomiale, espérance, variance.
- Loi de Poisson, espérance, variance.
- Loi géométrique, espérance, variance, propriété d'invariance temporelle.

Polynômes à coefficients réels ou complexes

- Monômes, degré, coefficients, polynômes à coefficients réels ou complexes.
- Ensembles $\mathbf{R}[X], \mathbf{C}[X]$, ainsi que $\mathbf{R}_n[X], \mathbf{C}_n[X]$ quand $n \in \mathbf{N}$. Notation $\mathbf{K}$.
- Opérations sur les polynômes : somme, produit, composée.
- Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée de polynômes.
- Une combinaison linéaire de monômes de degrés distincts ne peut être nulle que si tous les coefficients sont nuls.
- Polynôme dérivé, degré du polynôme dérivé.
- Racines d'un polynôme.
- Un polynôme P est factorisable par $X-\alpha$ si, et seulement si, α est une racine de P.
- Généralisation à plusieurs racines distinctes.
- Ordre de multiplicité d'une racine.
- Théorème de d'Alembert-Gauss :
  - Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$ peut s'écrire $P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$, où α_i sont les racines complexes de P, pas nécessairement distinctes, et λ son coefficient dominant.
  - Tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité.
- Un polynôme de degré inférieur ou égal à n ayant au moins $n+1$ racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, est nul.

Questions de cours :

1. Formule des probabilités totales pour un système (quasi) complet d'événements lié à une VAR discrète.
2. Définition de la loi de probabilité d'une VAR discrète.
3. Définition du moment d'ordre r d'une VAR discrète.
4. Définition de l'espérance d'une VAR discrète.

5. Théorème de transfert pour une fonction d'une VAR discrète.
6. Définition de la variance et de l'écart-type d'une VAR discrète.
7. Théorème de König-Huygens.
8. Espérance, variance et écart-type de $Y = aX + b$.
9. Définition de la variable centrée réduite associée à une VAR discrète.
10. Loi certaine, espérance et variance.
11. Loi uniforme, espérance de la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
12. Loi de Bernoulli, espérance et variance.
13. Loi binomiale, espérance et variance.
14. Loi de Poisson, espérance et variance.
15. Loi géométrique, espérance et variance.
16. si P et Q sont des polynômes non nuls, que dire de :
$$\deg(P+Q), \qquad \deg(P \times Q), \qquad \deg(P \circ Q) \quad ?$$
17. Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ?
18. Qu'appelle-t-on ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme ?
19. Somme et produit des racines d'un trinôme.
20. Si $\alpha \in \mathbf{C}$ est racine de $P \in \mathbf{R}[X]$, que dire de $\overline{\alpha}$?