Programme de colles
Semaine 7 du 9/11 au 13/11

Polynômes à coefficients réels ou complexes

- Monômes, degré, coefficients, polynômes à coefficients réels ou complexes.
- Ensembles $\mathbf{R}[X], \mathbf{C}[X]$, ainsi que $\mathbf{R}_n[X], \mathbf{C}_n[X]$ quand $n \in \mathbf{N}$. Notation $\mathbf{K}$.
- Opérations sur les polynômes : somme, produit, composée.
- Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée de polynômes.
- Une combinaison linéaire de monômes de degrés distincts ne peut être nulle que si tous les coefficients sont nuls.
- Polynôme dérivé, degré du polynôme dérivé.
- Racines d'un polynôme.
- Un polynôme P est factorisable par $X - \alpha$ si, et seulement si, α est une racine de P.
- Généralisation à plusieurs racines distinctes.
- Ordre de multiplicité d'une racine.
- Théorème de d'Alembert-Gauss :
  * Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$ peut s'écrire $P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$, où α_i sont les racines complexes de P, pas nécessairement distinctes, et λ son coefficient dominant.
  * Tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité.
- Un polynôme de degré inférieur ou égal à n ayant au moins $n+1$ racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, est nul.

Couples de variables aléatoires réelles (VAR) discrètes

- Notion de couple (X, Y) de VAR discrètes.
- Notation des événements : $[X = x] \cap [Y = y]$ se note $[X = x, Y = y]$.
- Loi conjointe du couple, lois marginales.
- Lois conditionnelles.
- Cas de la somme de deux VAR entières ($X(\Omega), Y(\Omega) \subset \mathbf{N}$).
- Théorème de transfert pour un couple de VAR **finies**.
- Covariance d'un couple (X, Y), condition d'existence, théorème de König-Huygens.
- Espérance et variance d'une somme $X + Y$.
- VAR discrètes indépendantes : $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors :
  * $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes pour toutes fonctions f et g
  * $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X) \times \mathbf{E}(Y)$
  * $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$
  * $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$
- Loi de la somme de deux VAR indépendantes suivant des lois binomiales de même paramètre p.
- Loi de la somme de deux VAR indépendantes suivant des lois de Poisson.
- Généralisation au cas de n VAR mutuellement indépendantes.

Questions de cours :

1. si P et Q sont des polynômes non nuls, que dire de :
   $\deg(P + Q)$, $\deg(P \times Q)$, $\deg(P \circ Q)$?
2. Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ?
3. Qu'appelle-t-on ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme ?
4. Somme et produit des racines d'un trinôme.
5. Si $\alpha \in \mathbf{C}$ est racine de $P \in \mathbf{R}[X]$, que dire de $\overline{\alpha}$?

6. Définition de la loi conjointe d'un couple de VAR discrètes.
7. Comment déterminer les lois marginales du couple (X, Y) à partir de sa loi conjointe ?
8. Définir la loi de X conditionnée par un événement $[Y = y]$ de probabilité non nulle.
9. Définir la loi de X sachant Y.
10. Théorème de transfert pour un couple de VAR finies.
11. Définir le covariance d'un couple de VAR discrètes. Condition d'existence.
12. Variance d'une somme de VAR.
13. Définition de l'indépendance de deux VAR discrètes.
14. Conséquence de l'indépendance sur l'espérance d'un produit, et la variance d'une somme.
15. Lien entre indépendance et non corrélation.
16. Stabilité de la loi binomiale.
17. Stabilité de la loi de Poisson.