BCPST 2

Correction d'exercices de TD

Exercice 30 : premier sucès sans remise

1) Loi de X_n :

$X_n(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$ car au plus tôt on pioche une boule rouge au premier tirage, et au plus tard à l'avant-dernier tirage : puisqu'il y a 2 boules rouges dans l'urne, on en obtient une forcément avant le dernier tirage. Soit $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on cherche $\mathbf{P}(X_n = k)$.

Notons B_ℓ l'événement : "au ℓ-ème tirage, on pioche une boule blanche ".

Alors $[X_n = k] = \bigcap_{\ell=1}^{k-1} B_\ell \cap \overline{B_k}$. On passe aux probabiltés, et on utilise la FPC :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n = k) &= \mathbf{P}(B_1) \times \mathbf{P}_{B_1}(B_2) \times \ldots \times \mathbf{P}_{\cap_{\ell=1}^{k-1} B_\ell}(\overline{B_k}) \\ &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \ldots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{2}{n-k+1}\end{aligned}$$

On repère un quotient télescopique. Après simplifications : $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbf{P}(X_n = k) = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$.

2) Espérance de X_n :

$X_n(\Omega)$ est fini, donc X_n admet une espérance. On a : $e_n = \mathbf{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k \times \mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k(n-k)}{n(n-1)}$

On calcule cette somme est factorisant les constantes, en développant le numérateur pour faire apparaître des sommes usuelles :

$$e_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (nk - k^2) = \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) = \frac{2}{n(n-1)} \left(n \times \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right)$$

$e_n = n - \dfrac{2n-1}{3}$. En conclusion : $e_n = \dfrac{n+1}{3}$. On a l'équivalent : $e_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{3}$.

Exercice 31 : espérance d'une VAR entière

1) Cas où X est à support fini.

Si $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$, alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=k}^{n} \mathbf{P}(X = \ell) = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(X = \ell)$ en inversant les sommes.

On repère alors une somme de constantes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \mathbf{P}(X = \ell) = \ell \times \mathbf{P}(X = \ell)$.

Il vient donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell \times \mathbf{P}(X = \ell) = \mathbf{E}(X)$

par définition de l'espérance, et puisque le terme d'indice $\ell = 0$ est nul.

2) Cas où X est à support infini mais admet une espérance.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=k}^{+\infty} \mathbf{P}(X = \ell) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\min(\ell,n)} \mathbf{P}(X = \ell)$ en inversant les sommes.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \min(\ell, n) \times \mathbf{P}(X = \ell) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell \times \mathbf{P}(X = \ell) + n \sum_{\ell=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = \ell)$.

On trouve donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X \geqslant k) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell \times \mathbf{P}(X = \ell) + n \times \mathbf{P}(X > n) \qquad (\mathcal{R})$.

On sait que la série de terme général $n \times \mathbf{P}(X = n)$ converge (absolument) car X admet une espérance.

Soit : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k \times \mathbf{P}(X = k)$. Alors (R_n) converge vers 0.

Mais $R_n \geqslant n \times \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = n \times \mathbf{P}(X > n)$. Ainsi, $n \times \mathbf{P}(X > n)$ converge vers 0.

On fait tendre n vers $+\infty$ dans $(\mathcal{R})$: la série de terme général $\mathbf{P}(X \geqslant k)$ converge, et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell \times \mathbf{P}(X = \ell) = \mathbf{E}(X).$$

Exercice 32 : problème du collectionneur

1) Loi de X :

$X(\Omega) = \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ car il faut au minimum 2 tirages pour voir apparaître une boule blanche et une noire.

Pour tout $k \geqslant 1$, soit B_k (respectivement N_k) l'événement : "on pioche une boule blanche (respectivement : noire) au k-ème tirage."

Alors pour tout $\ell \geqslant 2$, $[X = \ell] = (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{\ell-1} \cap N_\ell) \cup (N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{\ell-1} \cap B_\ell)$

L'union est disjointe, et les tirages successifs sont indépendants, donc en passant aux probabilités :
$\mathbf{P}(X = \ell) = q^{\ell-1} \times p + p^{\ell-1} \times q$.

Vérification :

$\sum_{\ell=2}^{+\infty} (q^{\ell-1}p + p^{\ell-1}q) = pq \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} q^\ell + \sum_{\ell=0}^{+\infty} p^\ell \right)$ et on reconnaît des séries géométriques convergentes.

$$\sum_{\ell=2}^{+\infty} \mathbf{P}(X = \ell) = pq \times \left(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{1-p} \right) = p + q = 1.$$

2) Espérance de X :

On s'intéresse à la série de terme général $u_n = n \times \mathbf{P}(X = n)$, pour $n \geqslant 2$.

On a : $u_n = npq^{n-1} + nqp^{n-1}$.

On reconnaît une combinaison linéaire de termes de séries géométriques dérivées premières, de raisons p ou q, avec $p, q \in]0, 1[$, donc absolument convergentes.

X admet donc une espérance, et :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} npq^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} nqp^{n-1} = p\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1 \right) + q\left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1 \right) = \frac{1-p^2}{p} + \frac{1-q^2}{q}$$

Exercice 33 : numéros strictement décroissants

1) Loi de X_n :

$X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

$[X_n > j]$ signifie que les j premiers tirages ont amené des numéros strictement décroissants.

Le nombre de j-uplets de $[\![1, n]\!]$ est n^j.

Une liste de longueur j constituée de numéros strictement décroissants correspond à une partie de cardinal j de $[\![1, n]\!]$. Il y en a donc $\binom{n}{j}$.

Par équiprobabilté des tirages, on obtient donc : $\forall j \in X_n(\Omega),\ \mathbf{P}(X > j) = \frac{\binom{n}{j}}{n^j}$.

Pour tout $j \in X_n(\Omega)$, $\mathbf{P}(X_n = j) = \mathbf{P}(X_n > j-1) - \mathbf{P}(X_n > j)$.

On a donc : $\forall j \in X_n(\Omega),\ \mathbf{P}(X_n = j) = \frac{\binom{n}{j-1}}{n^{j-1}} - \frac{\binom{n}{j}}{n^j}$.

2) Limites quand n tend vers l'infini :

$\binom{n}{j} = \frac{1}{j!} \times n(n-1)\ldots(n-j+1)$ donc $\binom{n}{j} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^j}{j!}$.

Par quotient d'équivalents : $\mathbf{P}(X > j) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{j!}$.

De même, $\mathbf{P}(X = j) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{(j-1)!} - \frac{1}{j!} = \frac{j-1}{j!}$.

Exercice 34 : le compteur défectueux

$Y(\Omega) = [\![1, N]\!]$.

Pour tout $1 \leqslant k \leqslant N$, on utilise le SCE $(X = \ell)_{\ell \geqslant 1}$ et la FPT pour calculer $\mathbf{P}(Y = k)$:

$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = \ell) \times \mathbf{P}_{X=\ell}(Y = k) = \mathbf{P}(X = k) \times 1 + \sum_{\ell=N+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = \ell) \times \frac{1}{N}.$$

$$\mathbf{P}(Y=k) = pq^{k-1} + \frac{1}{N}\sum_{\ell=N+1}^{+\infty} pq^{\ell-1} = pq^{k-1} + \frac{pq^N}{N} \times \frac{1}{1-q}.$$

Conclusion : $\forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbf{P}(Y=k) = pq^{k-1} + \dfrac{q^N}{N}$.

Y est à support fini donc admet une espérance.

On a : $\mathbf{E}(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(kpq^{k-1} + k\frac{q^N}{N} \right) = pS + q^N \times \frac{N+1}{2}$

où $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} kq^{k-1}$ est la somme partielle d'une série géométrique dérivée première.

On la calcule en dérivant de deux façons : $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} t^k = \frac{1-t^{N+1}}{1-t}$ définie pour $t \neq 1$.

On a : $f'(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} kt^{k-1} = \frac{-(N+1)t^N(1-t) + 1 - t^{N+1}}{(1-t)^2}$

donc $S = \dfrac{-(N+1)q^N(1-q) + 1 - q^{N+1}}{(1-q)^2}$ puis on remplace.