TD 10. Polynômes

84 (2a) $z^n = 1 \iff z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

(2b) $P_n(z) = 0 \iff (z+1)^n - 1 = 0$

$\iff (z+1)^n = 1$

$\iff z = e^{2ik\pi/n} - 1 \quad (k \in [\![0, n-1]\!])$.

On pose : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_k = e^{2ik\pi/n} - 1$

$= e^{ik\pi/n}\left(e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}\right)$ [Technique de l'arc médian]

$= 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) . e^{ik\pi/n}$ [Formule d'Euler].

P_n est unitaire, donc on a la forme factorisée :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \alpha_k).$$

(2c) D'une part : $P_n = (X+1)^n - 1$ donc $P_n' = n(X+1)^{n-1}$ et $P_n'(0) = n$.

D'autre part : $\alpha_0 = 0$ donc $P_n = X \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (X - \alpha_k)$.

On pose $Q = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \alpha_k)$ de sorte que $P_n = XQ$.

On dérive : $P_n' = Q + XQ'$ donc $P_n'(0) = Q(0) = \prod_{k=1}^{n-1} (-\alpha_k)$.

(2d) On identifie les deux résultats :

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} (-\alpha_k) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}}\right). \quad \text{On pose } \beta = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Alors : $n = (-2i)^{n-1} \times \beta \times \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{ik\pi}{n}\right)$

$= (-2i)^{n-1} . \beta . \exp\left(\frac{i\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}\right)$ et $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

$= (-2i)^{n-1} . \beta . i^{n-1} = 2^{n-1} \underbrace{(-1)^{n-1} \times (i^2)^{n-1}}_{(-1)^{2n-2} = 1} . \beta$ et on peut conclure :

$$\boxed{\beta = \frac{n}{2^{n-1}}}$$

85 $P = X^2 - 2\cos\theta . X + 1$

- On cherche les racines complexes de P : $\Delta = (-2\cos\theta)^2 - 4 = 4(\cos^2\theta - 1)$
$= -4\sin^2\theta$

On trouve $\alpha = \frac{2\cos\theta + 2i|\sin\theta|}{2}$

$\alpha = \cos\theta \pm i\sin\theta$ et $\bar{\alpha}$.

Conclusion : les racines de P sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Rq : $\alpha, \bar{\alpha} \notin \mathbb{R}$ sauf si $\theta = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, et alors $P = (X-1)^2$

ou si $\theta = \pi + 2k\pi$, et alors $P = (X+1)^2$.

- On montre que $\alpha, \bar{\alpha}$ sont racines de Q.

$$Q(e^{i\theta}) = (e^{i\theta})^{2n} - 2\cos(n\theta)(e^{i\theta})^n + 1$$
$$= e^{2in\theta} - 2\times\left(\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}\right)e^{ni\theta} + 1 \quad \text{[Moivre, et Euler]}$$
$$= e^{2in\theta} - (e^{2in\theta} + 1) + 1 = 0$$

$Q \in \mathbb{R}[X]$ et $Q(\alpha) = 0$ donc $Q(\bar{\alpha}) = 0$.

Conclusion : Q se factorise par $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha}) = P$.

87 1) $P_n = (X+i)^n - (X-i)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k i^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-i)^{n-k} \quad \text{[binôme de Newton]}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \left(i^{n-k} - (-i)^{n-k}\right) \quad \text{par linéarité.}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k i^{n-k} \left(1 - (-1)^{n-k}\right)$$

Si $n-k$ est pair, alors $1 - (-1)^{n-k} = 0$
Si $n-k$ est impair, alors $1 - (-1)^{n-k} = 2$

Il reste : $P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ n-k \text{ impair}}}^{n} 2\binom{n}{k} X^k i^{n-k}$ et $i^{n-k} = i \times i^{n-k-1}$

avec $n-k-1$ pair donc $i^{n-k-1} \in \mathbb{R}$

Conclusion : $P_n = i\,Q_n$ avec $Q_n = 2\sum_{\substack{k=0 \\ n-k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} i^{n-k-1} \cdot X^k \in \mathbb{R}[X]$.

2) Factorisation de P_n.

On résout $P_n(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

$P_n(z) = 0 \iff (z+i)^n - (z-i)^n = 0 \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$

car $P_n(i) = (2i)^n \neq 0$ donc $z \neq i$.

Il vient : $\frac{z+i}{z-i} = e^{2ik\pi/n}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$,

donc : $z+i = (z-i)e^{2ik\pi/n}$

$z(1-e^{2ik\pi/n}) = -i(e^{2ik\pi/n}+1)$.

Pour $k \neq 0$, on utilise la technique de l'arc médian :

$z \cdot e^{ik\pi/n}(e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n}) = -i e^{ik\pi/n}(e^{ik\pi/n} + e^{-ik\pi/n})$

$z\left(-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = -2i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

donc $z = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ où $\operatorname{cotan} t = \frac{\cos t}{\sin t}$ si $\sin t \neq 0$.

$\deg P_n \leqslant n-1$ et on a trouvé $(n-1)$ racines distinctes.

Le coefficient dominant de P_n est : $2\binom{n}{n-1} i^1 = 2ni$.

Conclusion : $\boxed{P_n = 2ni \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).}$

88 Polynômes de Tchebychev.

1) $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$

$P_3 = XP_2 - P_1 = X(X^2-2) - X = X^3 - 3X$

$P_4 = XP_3 - P_2 = X(X^3-3X) - (X^2-2) = X^4 - 4X^2 + 2$.

On montre par récurrence-double que :

$\forall n \geqslant 1$, (H_n) : « $P_n = X^n + Q_n$ avec $\deg Q_n < n$ ».

- (H_1) et (H_2) sont vraies : initialisation sur 2 rangs consécutifs.
- Soit $n \geqslant 1$. On suppose H_n et H_{n+1} vraies.

Alors $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$

$= X(X^{n+1} + Q_{n+1}) - (X^n + Q_n)$

$= X^{n+2} + Q_{n+2}$ en posant $Q_{n+2} = XQ_{n+1} - Q_n$.

$\left.\begin{array}{l}\deg Q_{n+1} < n+1 \\ \deg Q_n < n\end{array}\right\}$ donc par opérations, $\deg Q_{n+2} < n+2$.

Ainsi H_{n+2} est vraie.

- On conclut grâce au principe de récurrence.

2) $z \in \mathbb{C}^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose (K_n) : « $P_n\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$ ».

- Initialisation aux rangs $n=0$ et $n=1$:

$P_0 = 2$ donc $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_0\left(z+\frac{1}{z}\right) = 2$

et $z^0 + \frac{1}{z^0} = 1 + \frac{1}{1} = 2$ donc (K_0) vraie.

$P_1 = X$ donc $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_1\left(z+\frac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z} = z^1 + \frac{1}{z^1}$ donc (K_1) vraie.

- Hérédité Soit $n \geq 0$. On suppose (K_n) et (K_{n+1}) vraies.

Alors $P_{n+2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \left(z+\frac{1}{z}\right) \times P_{n+1}\left(z+\frac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)$

$= \left(z+\frac{1}{z}\right) \times \left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$ d'après (K_n) et (K_{n+1})

$= z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n}$

$= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}$ donc (K_{n+2}) vraie.

3) Racines de P_n

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $\theta_k = \frac{\pi}{2n} + k \cdot \frac{\pi}{n}$.

Alors $\alpha_k = 2\cos\theta_k = e^{i\theta_k} + e^{-i\theta_k}$ [Euler]

donc d'après la question précédente :

$$P_n(\alpha_k) = P_n\left(e^{i\theta_k} + \frac{1}{e^{i\theta_k}}\right) = \left(e^{i\theta_k}\right)^n + \frac{1}{\left(e^{i\theta_k}\right)^n} = e^{in\theta_k} + e^{-in\theta_k}$$

Mais $n\theta_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$

donc $P_n(\alpha_k) = e^{i\pi/2} e^{ik\pi} + e^{-i\pi/2} \cdot e^{-ik\pi}$

$= i \times (-1)^k + (-i) \times (-1)^k = 0$

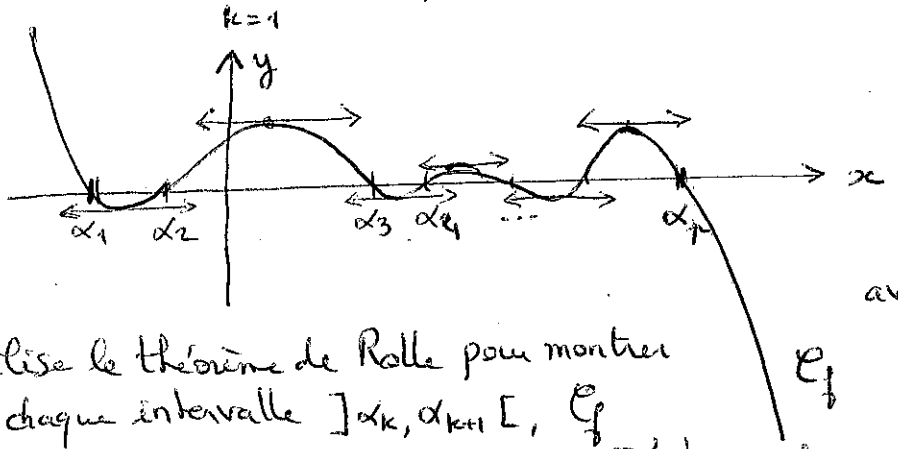
$\cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$ et les réels θ_k ($k \in [\![0, n-1]\!]$) sont deux à deux distincts dans $[0, \pi]$ donc les réels α_k sont 2 à 2 distincts.

On a trouvé n racines distinctes pour P_n, qui est de degré n.

Etant unitaire, on conclut : $\forall n \geq 1$, $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right)$

89 1) Polynôme réel scindé à racines simples.

On suppose $P = a_p \prod_{k=1}^{p} (X-\alpha_k)$ avec $\alpha_k \in \mathbb{R}$, tous distincts.



avec $f : x \mapsto P(x)$

On utilise le théorème de Rolle pour montrer que sur chaque intervalle $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, $\mathcal{C}_f$ possède une tangente horizontale, donc P' s'annule.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, f est continue. Sur $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, f est dérivable et $f(\alpha_k) = f(\alpha_{k+1}) = 0$.
D'après le th. de Rolle : il existe $\beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $f'(\beta_k) = 0$.
Enfin, $\deg P = p$ donc $\deg P' = p-1$ donc P' possède au maximum $p-1$ racines réelles. On en a trouvé $p-1$: on les a toutes.

Cel : $P' = a_p \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (X-\beta_k)$ où a_p est le coeff dominant de P'.

2) Polynôme réel scindé

(a) $\forall k \in [\![1, p]\!]$, α_k est racine de P de multiplicité m_k.
D'après le cours, cela signifie : $\begin{cases} P(\alpha_k) = P'(\alpha_k) = \dots = P^{(m_k-1)}(\alpha_k) = 0 \\ P^{(m_k)}(\alpha_k) \neq 0 \end{cases}$

On pose $Q = P'$. On peut donc écrire :

$$\begin{cases} Q(\alpha_k) = \dots = Q^{(m_k-2)}(\alpha_k) = 0 \\ Q^{(m_k-1)}(\alpha_k) \neq 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que α_k est racine de Q de multiplicité $m_k - 1$.
En conséquence, P' se factorise par $(X-\alpha_k)^{m_k-1}$.

(b) $\deg P = \sum_{k=1}^{p} m_k$ donc $\deg P' = -1 + \sum_{k=1}^{p} m_k$

On a trouvé d'après les deux questions précédentes :
- $p-1$ racines de P' qui séparent les racines de P
- pour tout k tel que $m_k \geq 2$, α_k est racine de P' de multiplicité $m_k - 1$

donc au total $(p-1) + \sum_{k=1}^{p} (m_k - 1) = -1 + \sum_{k=1}^{p} m_k$ racines comptées avec leur ordre de multiplicité. Puisque c'est précisément le degré de P', on les a toutes trouvées. Etant toutes réelles, on peut conclure.