Corrigé du DM n°3

Partie 1 : exercices d'analyse

Exercice 1 Suite arithmético-géométrique

1. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Le réel v_n est bien défini si et seulement si $u_n > 0$.
   On pose donc $\mathcal{H}_n$: "$u_n > 0$" .
   - Initialisation au rang $n = 1$: d'après l'énoncé, $u_1 > 0$ donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
   - Hérédité à partir du rang 1. Soit $n \geqslant 1$, supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
     Alors $u_{n+1} = a(u_n)^2 > 0$ car $a > 0$ et $u_n > 0$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : $\mathcal{H}_n$ est initialisée au rang 1 et héréditaire à partir du rang 1.
     D'après le principe de récurrence, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

   $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n > 0 \text{ donc } v_n \text{ est bien défini.}}$
2. Soit $n \geqslant 1$. Alors $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(au_n^2) = \ln(a) + 2\ln(u_n)$ d'après les propriétés du logarithme,
   donc : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ v_{n+1} = 2v_n + \ln(a), \text{ et la suite } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ est arithmético-géométrique.}}$
3. On détermine l'expression du point fixe ℓ, vérifiant : $\ell = 2\ell + \ln(a)$.
   On trouve : $\ell = -\ln(a)$. D'après le cours, la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $w_n = v_n - \ell$ est géométrique de raison 2, donc : $\forall n \geqslant 1,\ w_n = w_1 \times 2^{n-1}$.
   On remplace : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \exp(v_n) = \exp(w_n + \ell) = \exp\big((v_1 - \ell) \times 2^{n-1} + \ell\big)$.
   $= e^{\ell} \times e^{(\ln u_1 - \ell)2^{n-1}} = e^{-\ln a} \times e^{(\ln u_1 + \ln a)2^{n-1}}$
   Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{1}{a} \times (au_1)^{2^{n-1}}.}$

Exercice 2 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

1. Cette relation de récurrence admet pour équation caractéristique $(\mathcal{E}_1) : r^2 - 4r + 4 = 0$.
   $(\mathcal{E}_1) \Leftrightarrow (r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 2$. On a trouvé une racine double.
   D'après le cours : $\boxed{\exists A, B \in \mathbf{R} \mid \forall n \geqslant 0,\ u_n = (An + B) \times 2^n.}$
   Si de plus $u_0 = u_1 = 1$, alors $\begin{cases} B = 1 \\ 2(A + B) = 1 \end{cases}$ donc $A = -\dfrac{1}{2}$ et $B = 1$,
   et finalement, $\forall n \geqslant 0,\ u_n = \left(-\dfrac{n}{2} + 1\right) \times 2^n$.
2. Cette relation de récurrence admet pour équation caractéristique $(\mathcal{E}_2) : r^2 - 2r + 2 = 0$.
   $\Delta = -4 < 0$ donc on a deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{2 + i\sqrt{4}}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \overline{z_1}$.
   On cherche la forme exponentielle de z_1 : $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$.
   D'après le cours : $\boxed{\exists A, B \in \mathbf{R} \mid \forall n \geqslant 0,\ u_n = (\sqrt{2})^n \times \big(A\cos(\tfrac{n\pi}{4}) + B\sin(\tfrac{n\pi}{4})\big).}$
   Si de plus $u_0 = u_1 = 1$, alors $\begin{cases} A = 1 \\ \sqrt{2}\big(A\cos\frac{\pi}{4} + B\sin\frac{\pi}{4}\big) = 1 \end{cases}$ donc $A = 1$ et $B = 0$,
   et finalement, $\forall n \geqslant 0,\ u_n = (\sqrt{2})^n \times \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.
3. Cette relation de récurrence admet pour équation caractéristique $(\mathcal{E}_3) : 4r^2 - 1 = 0$.
   $(\mathcal{E}_3) \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow r = \pm\dfrac{1}{2}$. On a trouvé deux racines réelles distinctes.
   D'après le cours : $\boxed{\exists A, B \in \mathbf{R} \mid \forall n \geqslant 0,\ u_n = A\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + B\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n.}$
   Si de plus $u_0 = u_1 = 1$, alors $\begin{cases} A + B = 1 \\ \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 1 \end{cases}$ donc $A = \dfrac{3}{2}$ et $B = -\dfrac{1}{2}$,
   et finalement, $\forall n \geqslant 0,\ u_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Exercice 3 : Calcul intégral

1. $I_1 = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$. On reconnaît $\displaystyle\int \frac{u'}{u}$ avec $u = \ln$.
   $I_1 = [\ln(|\ln x|)]_e^{e^2} = \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln e) = \ln 2 - \ln 1$. Conclusion : $\boxed{I_1 = \ln 2.}$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$. On procède par intégration par parties (IPP), en dérivant le logarithme.
   On pose : $\forall x \in [0,1]$, $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1+x^2)$.
   Par opérations, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, et $\forall x \in [0,1]$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
   Par IPP, $I_2 = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - 2\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$
   $I_2 = \ln 2 - 2\left[x - \operatorname{Arctan} x\right]_0^1 = \ln 2 - 2(1 - \operatorname{Arctan} 1)$. Conclusion : $\boxed{I_2 = \ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}.}$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. On procède par changement de variables (CDV).
   On pose : $\forall x \in [0,1]$, $x = t^2 = \varphi(t)$. $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1])$, strictement monotone.
   On a : $\varphi'(t) = 2t$ donc $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Enfin, $\varphi([0,1]) = [0,1]$.
   Par changement de variables, $I_3 = \displaystyle\int_0^1 e^{-t} \times 2t\,\mathrm{d}t$.
   On procède alors par IPP, en posant $u(t) = t$ et $v(t) = -e^{-t}$.
   $u, v \in \mathcal{C}^1([0,1])$, et pour tout $t \in [0,1]$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = e^{-t}$.
   Il vient : $I_3 = 2[-te^{-t}]_0^1 - 2\displaystyle\int_0^1 -e^{-t}\,\mathrm{d}t = -2e^{-1} + 2[-e^{-t}]_0^1$. Conclusion : $\boxed{I_3 = 2 - 4e^{-1}.}$

Exercice 4 : Une suite d'intégrales

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a : $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale
   donc $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$. Mais pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 0$
   donc par croissance de l'intégrale, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ décroît.}}$
   De plus, $x \in [0,1]$, $\dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geqslant 0$ donc par positivité de l'intégrale, $u_n \geqslant 0$.
   Étant décroissante et minorée par 0, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge, vers un réel } \ell \geqslant 0.}$
2. Pour tout $x \in [0,1], 0 \leqslant \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$. On intègre entre 0 et 1 :
   $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}.}$
   $\lim \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc par théorème d'encadrement [*gendarmes*], on a : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers 0.}}$

Exercice 5 : Équations différentielles linéaires

1. $(E_1) : y' + y = e^t$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
   On pose $(H_1) : y' + y = 0$ l'équation homogène associée.
   D'après le cours, les solutions générales de (H_1) sont de la forme : $y_H(t) = \lambda e^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$.
   On utilise la méthode de variation de constante (MVC) pour déterminer une solution particulière y_p de (E_1). On pose : $y_p(t) = \lambda(t)e^{-t}$ avec λ une fonction dérivable.
   Par opérations : $y_p'(t) = \lambda'(t)e^{-t} - \lambda(t)e^{-t}$. Alors y_p est solution de (E_1) si et seulement si :
   $\lambda'(t)e^{-t} - \lambda(t)e^{-t} + \lambda(t)e^{-t} = e^t$, ce qui équivaut à ; $\lambda'(t) = e^{2t}$.
   On pose par exemple : $\lambda(t) = \dfrac{1}{2}e^{2t}$ et il vient $y_p(t) = \dfrac{1}{2}e^t$.
   D'après le théorème de structure, $\boxed{\text{l'ensemble solution de } (E_1) \text{ est } \mathcal{S}_1 = \left\{t \longmapsto \lambda e^{-t} + \dfrac{1}{2}e^t,\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}.}$

2. $(E_2) : y'' - 3y' + 2y = t^2 + e^{-t}$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
On pose $(H_2) : y'' - 3y' + 2y = 0$ l'équation homogène associée, d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$.
On repère la racine évidente $r_1 = 1$ et on a $r_1 \times r_2 = \dfrac{2}{1}$ donc $r_2 = 2$.
D'après le cours, les solutions générales de (H_2) sont de la forme : $y_H(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.
On suit l'indication pour trouver une solution particulière y_p de (E_2).

$*$ On pose $(E_{2,1}) : y'' - 3y' + 2y = t^2$ dont on cherche une solution polynomiale.
Sauf contre-indication, on cherche une fonction polynomiale de même degré que l'ordre de l'équation différentielle, soit : $y_{p,1}(t) = at^2 + bt + c$ avec a, b, c des constantes.
On dérive deux fois $y_{p,1}$ et on réinjecte dans $(E_{2,1})$: $y'_{p,1}(t) = 2at + b$ et $y''_{p,1}(t) = 2a$ donc $y_{p,1}$ vérifie $(E_{2,1})$ si et seulement si : $2a - 3(2at + b) + 2(at^2 + bt + c) = t^2$.
On procède par identification des coefficients : $\begin{cases} 2a = 1 \\ -6a + 2b = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 0 \end{cases}$
On en déduit que : $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$ et $c = \dfrac{7}{4}$, donc $y_{p,1}(t) = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{3t}{2} + \dfrac{7}{4}$.

$*$ On pose $(E_{2,2}) : y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$ dont on cherche une solution de la forme $y_{p,2}(t) = \lambda e^{-t}$.
On dérive deux fois $y_{p,2}$ et on réinjecte dans $(E_{2,2})$: $y'_{p,2}(t) = -\lambda e^{-t}$ et $y''_{p,2}(t) = \lambda e^{-t}$ donc $y_{p,2}$ vérifie $(E_{2,2})$ si et seulement si : $\lambda e^{-t} + 3\lambda e^{-t} + 2\lambda e^{-t} = e^{-t}$, ce qui équivaut à $\lambda = \dfrac{1}{6}$.

$*$ D'après le principe de superposition, $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$ est une solution particulière de (E_2).

$*$ D'après le théorème de structure,

$$\boxed{\text{l'ensemble solution de } (E_2) \text{ est } \mathcal{S}_2 = \left\{ t \longmapsto \lambda e^t + \mu e^{2t} + \frac{t^2}{2} + \frac{3t}{2} + \frac{7}{4} + \frac{e^{-t}}{6},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.}$$

Exercice 6 : **Calculs dans C**

1. $|z_1|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2$ donc $|z_1| = \sqrt{2}$.
$z_1 = \sqrt{2} \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ donc $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{6}}.}$
$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ donc $\boxed{z_2 = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}.}$
$z_3 = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{6}}} = e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})}$ donc $\boxed{z_3 = e^{\frac{i\pi}{12}}.}$

2. $z_3 = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ donc il s'agit de déterminer la forme algébrique de z_3.
$z_3 = \dfrac{2(1+i)}{\sqrt{6} + i\sqrt{2}} = \dfrac{2(1+i)(\sqrt{6} - i\sqrt{2})}{6+2} = \dfrac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{8} + i\dfrac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{8} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
Conclusion : $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.}$

Partie 2 : Problème du collectionneur

I : nombre moyen de vignettes différentes obtenues après n achats

1.
```
def sans_repetition(L) :
    M = []
    for elt in L :
        if elt not in M :
            M.append(elt)
    return M
```

2.
```
import random as rd
def vignettes(N,n) :
    return [ rd.randint(1,N) for _ in range(n) ]
```

3.
```
def X(N,n) :
    L = vignettes(N,n)
    M = sans_repetition(L)
    return len(M)
```

4.
```
def esperance(N,n,nbe) :
    s = 0
    for _ in range(nbe) :
        s += X(N,n)
    return s/nbe
```

```
print(esperance(10,10,1000))
>>> 6.509
```

5. X_1 suit la loi certaine de valeur 1 : on a forcément une nouvelle vignette lors de l'achat du premier paquet de céréales.

   $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$ car après avoir acheté 2 paquets, on peut avoir deux vignettes différentes, ou deux fois la même vignette.
   $\mathbf{P}(X_2 = 1) = \dfrac{1}{N}$ car c'est la probabilité d'avoir trouvé dans le deuxième paquet la même vignette que celle du premier paquet. On en déduit que $\mathbf{P}(X_2 = 2) = 1 - \dfrac{1}{N}$.
   $\mathbf{E}(X_1) = 1$ et $\mathbf{E}(X_2) = 1 \times \dfrac{1}{N} + 2\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)$ donc $\mathbf{E}(X_2) = 2 - \dfrac{1}{N}$.

6. $*$ si $n \leqslant N$, alors $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

   $*$ si $n > N$, alors $X_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$. Conclusion : $\boxed{X_n(\Omega) = [\![1, \min(n, N)]\!].}$

7. Soient $n \geqslant 2$ et $k \in X_n(\Omega)$. Supposons dans un premier temps que $k \geqslant 2$.
   $\big([X_{n-1} = j]\big)_{j \in X_{n-1}(\Omega)}$ forme un système complet d'événements.
   D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{j \in X_{n-1}(\Omega)} \mathbf{P}(X_{n-1} = j) \times \mathbf{P}(X_n = k \,|\, X_{n-1} = j)$$

   Mais $\mathbf{P}(X_n = k \,|\, X_{n-1} = j) = 0$ si j est différent de $k-1$ et de k, car il est impossible d'avoir collectionné k modèles différents de vignettes après l'achat du n-ème paquet si on n'avait pas collectionné k ou $(k-1)$ modèles différents après l'achat du $(n-1)$-ème paquet. De plus,
   $\mathbf{P}(X_n = k \,|\, X_{n-1} = k-1) = \dfrac{N - (k-1)}{N}$ par équiprobabilité (on obtient un nouveau modèle),
   et $\mathbf{P}(X_n = k \,|\, X_{n-1} = k) = \dfrac{k}{N}$ (on obtient un modèle déjà trouvé).
   Il reste donc : $\mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X_{n-1} = k-1) \times \dfrac{N-k+1}{N} + \mathbf{P}(X_{n-1} = k) \times \dfrac{k}{N}$.
   Enfin si $k = 1$, alors l'événement $[X_n = 1]$ implique l'événement $[X_{n-1} = 1]$.
   On a donc $[X_n = 1] = [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 1]$ donc en passant aux probabilités (FPC) :
   $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_{n-1} = 1) \times \mathbf{P}(X_n = 1 \,|\, X_{n-1} = 1) = \mathbf{P}(X_{n-1} = 1) \times \dfrac{1}{N}$,
   ce qui correspond bien à la formule cherchée lorsque $k = 1$.

Conclusion : $\boxed{\forall k \in X_n(\Omega),\ \mathbf{P}(X_n = k) = \mathbf{P}(X_{n-1} = k-1) \times \dfrac{N-k+1}{N} + \mathbf{P}(X_{n-1} = k) \times \dfrac{k}{N}.}$

8. Soit $n \geqslant 2$. Par définition : $\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} k \times \mathbf{P}(X_n = k)$. D'après la question précédente :

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} k \times \mathbf{P}(X_{n-1} = k-1) \times \frac{N-k+1}{N} + \sum_{k \in X_n(\Omega)} k \times \mathbf{P}(X_{n-1} = k) \times \frac{k}{N}$$

Dans la première somme, le terme pour $k = 1$ est nul. On y effectue un glissement d'indices :

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{\min(n,N)-1} (k+1) \times \mathbf{P}(X_{n-1} = k) \times \frac{N-k}{N} + \sum_{k=1}^{\min(n,N)} k \times \mathbf{P}(X_{n-1} = k) \times \frac{k}{N}$$

$*$ si $n \geqslant N+1$, alors d'une part, dans la première somme, $\min(n,N) - 1 = N - 1$ mais le terme pour $k = N$ est nul, donc on peut le rajouter ;
et d'autre part dans la deuxième somme, $\min(n,N) = N = \min(n-1, N)$
donc $[\![1, \min(n,N)]\!] = X_{n-1}(\Omega)$.

$*$ si $n \leqslant N$, alors d'une part, $\min(n,N) - 1 = n - 1$ et $[\![1, n-1]\!] = X_{n-1}(\Omega)$;
et d'autre part si $k = n$, on a : $\mathbf{P}(X_{n-1} = k) = 0$.
Ainsi dans tous les cas :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_n) &= \sum_{k \in X_{n-1}(\Omega)} (k+1) \times \mathbf{P}(X_{n-1} = k) \times \frac{N-k}{N} + \sum_{k \in X_{n-1}(\Omega)} k \times \mathbf{P}(X_{n-1} = k) \times \frac{k}{N} \\
&= \sum_{k \in X_{n-1}(\Omega)} \mathbf{P}(X_{n-1} = k) \times \left((k+1)\frac{N-k}{N} + k \times \frac{k}{N} \right) \\
&= \sum_{k \in X_{n-1}(\Omega)} \mathbf{P}(X_{n-1} = k) \times \left(k \times \frac{N-1}{N} + 1 \right) \\
&= \frac{N-1}{N} \sum_{k \in X_{n-1}(\Omega)} k \times \mathbf{P}(X_{n-1} = k) + \sum_{k \in X_{n-1}(\Omega)} \mathbf{P}(X_{n-1} = k) \\
&= \frac{N-1}{N} \times \mathbf{E}(X_{n-1}) + \mathbf{P}(\Omega)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbf{E}(X_n) = \dfrac{N-1}{N} \times \mathbf{E}(X_{n-1}) + 1.}$

9. On reconnaît une suite arithmético-géométrique.
Soit ℓ tel que $\ell = \dfrac{N-1}{N} \times \ell + 1$. On trouve : $\ell = N$.
La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = \mathbf{E}(X_n) - \ell$ est géométrique de raison $\dfrac{N-1}{N}$.
En conséquence, $\forall n \geqslant 1,\ u_n = u_1 \times \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{n-1}$ et on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \mathbf{E}(X_n) = (1-N) \times \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} + N.}$$

10. $\left|\dfrac{N-1}{N}\right| < 1$ donc $\lim \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{n-1} = 0$. Ainsi, $\boxed{\lim \mathbf{E}(X_n) = N.}$
Cela signifie qu'en achetant un grand nombre de boîtes de céréales, on finit en moyenne par compléter la collection.

II : temps d'attente pour compléter la collection

11. $\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![0, N-1]\!],\ T_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{N-i}{N}\right)}$ car T_i est le rang du premier succès lors de la répétition d'épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de paramètre $\dfrac{N-i}{N}$.

12. $\boxed{T = \sum_{i=0}^{N-1} T_i.}$

13. Toutes les variables aléatoires T_i admettent une espérance.

Par linéarité de l'espérance, $\boxed{T \text{ admet une espérance}}$, et $\mathbf{E}(T) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{E}(T_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{N}{N-i}$.

On effectue une inversion d'indices (en posant $k = N - i$) : $\boxed{\mathbf{E}(T) = N \times \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.}$

14. On a montré au DM1 que : $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sim \ln(N)$, donc $\boxed{\mathbf{E}(T) \sim N\ln(N).}$

15.
```
import random as rd
def temps_collection(N) :
    i,n = 0,0
    while i < N :
        n += 1
        r = rd.random()
        if r < (N-i)/N :
            i += 1
    return n
```

16.
```
def espT(N,nbe) :
    s = 0
    for _ in range(nbe) :
        s += temps_collection(N)
    return s/nbe
```

```
print(espT(10,1000))
>>> 28.869
```

```
from math import log
print(10*log(10))
>>> 23.02585092994046
```

On constate un écart significatif avec l'équivalent de la question 14.

En utilisant le développement asymptotique du DM1 : $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1)$

on trouve : $\mathbf{E}(T) \underset{+\infty}{=} N\ln(N) + N\gamma + o(N)$.

En utilisant la valeur approchée $\gamma \approx 0.577$:

```
print(10*log(10)+10*0.577)
>>> 28.79585092994046
```

on a maintenant un résultat qui semble cohérent.