DS n°2, mathématique

Durée : 2 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage de tout outil électronique est interdit.
Le sujet comporte 2 pages, et est constitué d'un exercice et d'un problème indépendants.

Exercice : Une loi sans espérance et l'effet du minimum

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}^\star$ telle que :

$$(\mathcal{R}) \qquad \forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Partie I : Une variable sans espérance

1. Déterminer des réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.
2. Montrer que la relation $(\mathcal{R})$ définit bien une loi de probabilité.
3. Déterminer la fonction de répartition de X, et en déduire que : $\forall n \geqslant 1,\ \mathbf{P}(X \geqslant n) = \dfrac{1}{n}$.
4. Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Partie II : Le minimum de plusieurs observations

Soit $r \in \mathbf{N}^\star$. On considère r variables aléatoires $X_1, \cdots, X_r$ mutuellement indépendantes et de même loi que X.
On pose $M_r = \min(X_1, \cdots, X_r)$.

5. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Calculer $\mathbf{P}(M_r \geqslant n)$, puis déterminer $\mathbf{P}(M_r = n)$.
6. Soit $N \in \mathbf{N}^\star$. On pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n \times \mathbf{P}(M_r = n)$.
   Montrer que : $S_N = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^r}\right) - \frac{1}{(N+1)^{r-1}}$.
7. En déduire que M_r admet une espérance si, et seulement si, $r \geqslant 2$.
   Pour $r \geqslant 2$, exprimer $\mathbf{E}(M_r)$ à l'aide d'une série.
8. Montrer que la suite $(\mathbf{E}(M_r))_{r \geqslant 2}$ est strictement décroissante.
9. En déduire que cette suite converge, puis déterminer sa limite.

Problème : scission d'une population aléatoire

Dans tout le problème, on considère une population de N individus, où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.
Chaque individu de cette population peut être classé dans une certaine catégorie : A ou B ou C *etc*

Dans les parties I et II, N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Dans la partie I, on considère uniquement deux catégories : A et B.
Dans la partie II, on considère trois catégories : A, B et C.

Dans la partie III, on étudie la loi que doit suivre N pour que les effectifs des catégories soient indépendants.

Partie I : Scission en deux catégories avec $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, sachant que l'événement $[N = n]$ est réalisé, chacun des n individus, et indépendamment des autres, a la probabilité $p \in]0,1[$ d'appartenir à la catégorie A et la probabilté $1-p$ d'appartenir à la catégorie B.
On note X et Y les nombres d'individus appartenant respectivement aux catégories A et B.

1. Rappeler la loi de N, ainsi que son espérance et sa variance.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Identifier les lois usuelles suivies par X et Y conditionnées par l'événement $[N = n]$.
3. En considérant un système complet d'événements liés à la variable N, montrer que X suit la loi de Poisson de paramètre λp.

On admet que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$.

4. Exprimer la variance de N en fonction des variances de X et de Y, et de la covariance du couple (X,Y).
   Déduire des questions précédentes que X et Y sont non corrélées.
5. Déterminer la loi du couple (X,Y).
6. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

Partie II : Scission en trois catégories avec $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Soient $p, q \in]0,1[$ tels que $p+q<1$. On pose $r = 1-p-q$.
Conditionnellement à l'événement $[N = n]$, chacun des n individus est classé, indépendamment des autres, dans la catégorie A avec la probabilité p, dans la catégorie B avec la probabilité q et dans la catégorie C avec la probabilité r.
On note X et Y les nombres d'individus appartenant respectivement aux catégories A et B, puis on pose $S = X + Y$.

7. En utilisant les résultats de la partie I, donner les lois usuelles suivies par X, par Y et par S.
   On précisera à chaque fois les paramètres.
8. Montrer que X et Y sont non corrélées.
9. Calculer $\mathrm{Cov}(S,X)$. Les variables S et X sont-elles indépendantes ?
10. Déterminer la loi du couple (X,Y).
11. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

Partie III : Une caractérisation de la loi de Poisson

Dans cette dernière partie, on suppose que N suit une loi à valeurs dans $\mathbf{N}$, telle que $\mathbf{P}(N=n) > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note a_n le réel défini par : $\mathbf{P}(N=n) = \dfrac{a_n}{n!}$.

Comme précédemment, pour tout $n \in \mathbf{N}$, si l'événement $[N=n]$ est réalisé, les n individus se répartissent indépendamment des autres, dans la catégorie A avec la probabilité p, ou dans la catégorie B avec la probabilité $1-p$.
On note X et Y les nombres d'individus appartenant respectivement aux catégories A et B.
On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

12. Soit $(k,\ell) \in \mathbf{N}^2$. Exprimer $\mathbf{P}(X=k, Y=\ell)$ en fonction de $a_{k+\ell}$, de k, de ℓ et de p.
13. Montrer que : $\forall (k,\ell) \in \mathbf{N}^2$, $\mathbf{P}(X=k,Y=\ell) \times \mathbf{P}(X=0,Y=0) = \mathbf{P}(X=k,Y=0) \times \mathbf{P}(X=0,Y=\ell)$.
14. En déduire que : $\forall (k,\ell) \in \mathbf{N}^2$, $a_{k+\ell} \times a_0 = a_k \times a_\ell$.
15. Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = a_0 c^n$.
16. Exprimer a_0 en fonction de c, puis déterminer la loi de N.

* * * Fin du sujet * * *