Corrigé du DS n°2

Problème : scission d'une population aléatoire

I : Scission en deux catégories avec $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

1. D'après le cours : $N(\Omega) = \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(N = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$, et $\mathbf{E}(N) = \mathbf{V}(N) = \lambda$.
2. Si $[N = n]$ est réalisé, alors X compte le nombre de succès (appartenir à la catégorie A) dans la répétition de n épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p.
   En conséquence, la loi de X conditionnée par l'événement $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
   De même, la loi de Y conditionnée par l'événement $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-p)$.
3. $\big([N = n]\big)_{n\geqslant 0}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :
   $\forall k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n) \times \mathbf{P}(X = k \,|\, N = n)$.
   Si $n < k$, alors $\mathbf{P}(X = k \,|\, N = n) = 0$. Il reste donc : $\mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n) \times \mathbf{P}(X = k \,|\, N = n)$.
   On connaît la loi de N, et la loi de X conditionnée par l'événement $[N = n]$, donc on peut remplacer :
   $\mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Après glissement d'indices :
   $\mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} \times \binom{n+k}{k} p^k (1-p)^n$. On simplifie : $\dfrac{1}{(n+k)!} \times \binom{n+k}{k} = \dfrac{1}{k!\,n!}$ donc :
   $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} p^k \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!} \times (1-p)^n$. On reconnaît une série exponentielle :
   $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} p^k e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \times \dfrac{(\lambda p)^k}{k!}$. Conclusion : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p).}$
4. D'après l'énoncé, on a : $N = X + Y$. Donc $\mathbf{V}(N) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.
   On sait de plus que : $\mathbf{V}(N) = \lambda$, $\mathbf{V}(X) = \lambda p$ et $\mathbf{V}(Y) = \lambda(1-p)$.
   En remplaçant, on trouve : $\boxed{\mathrm{Cov}(X, Y) = 0}$, donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont non corrélées.}}$
5. $(X, Y)(\Omega) = \mathbf{N}^2$. Soit $(k, \ell) \in \mathbf{N}^2$. $[X = k, Y = \ell]$ implique $[N = k + \ell]$ donc
   $\mathbf{P}(X = k, Y = \ell) = \mathbf{P}(N = k + \ell) \times \mathbf{P}(X = k, Y = \ell \,|\, N = k + \ell)$
   $= e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} \times \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell$
   Conclusion : $\boxed{\forall (k, \ell) \in \mathbf{N}^2,\ \mathbf{P}(X = k, Y = \ell) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \times p^k (1-p)^\ell.}$
6. $\mathbf{P}(X = k) \times \mathbf{P}(Y = \ell) = e^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^k}{k!} \times e^{-\lambda(1-p)}\dfrac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!}$ d'après la question 3.
   $= e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \times p^k (1-p)^\ell = \mathbf{P}(X = k, Y = \ell)$.
   La loi conjointe du couple (X, Y) est égale au produit des lois marginales, donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$

II : Scission en trois catégories avec $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

7. En fusionnant les catégories B et C, on retrouve pour X la situation de la partie I : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p).}$
   En fusionnant les catégories A et C, on retrouve pour Y la situation de la partie I avec q jouant le rôle de $1 - p$ donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda q).}$
   En fusionnant les catégories A et B, on retrouve pour S la situation de X dans la partie I, avec $p + q$ jouant le rôle de p, donc $\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda(p+q)).}$
8. Comme à la question 4., on calcule : $\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$
   $\lambda(p + q) = \lambda p + \lambda q + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$
   donc $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ et $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont non corrélées.}}$
9. $\mathrm{Cov}(S, X) = \mathrm{Cov}(X + Y, X) = \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(Y, X) = \mathbf{V}(X) + 0 = \lambda p$.
   $\boxed{S \text{ et } X \text{ sont (positivement) corrélées, donc non indépendantes.}}$

10. $(X,Y)(\Omega) = \mathbf{N}^2$. Soit $(k,\ell) \in \mathbf{N}^2$. En utilisant un SCE lié à N et d'après la FPT :
$\mathbf{P}(X=k, Y=\ell) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N=n) \times \mathbf{P}(X=k, Y=\ell \,|\, N=n)$.
Ces probabilités conditionnelles sont nulles si $n < k+\ell$, donc :
$\mathbf{P}(X=k, Y=\ell) = \sum_{n=k+\ell}^{+\infty} \mathbf{P}(N=n) \times \mathbf{P}(X=k, Y=\ell \,|\, N=n)$.
D'après la FPC : $\mathbf{P}(X=k, Y=\ell \,|\, N=n) = \mathbf{P}(X=k \,|\, N=n) \times \mathbf{P}(Y=\ell \,|\, [N=n] \cap [X=k])$.
En raisonnant comme à la question 2., on trouve :
$\mathbf{P}(X=k \,|\, N=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ et $\mathbf{P}(Y=\ell \,|\, [N=n] \cap [X=k]) = \binom{n-k}{\ell} \left(\frac{q}{1-p}\right)^{\ell} \left(1 - \frac{q}{1-p}\right)^{n-k-\ell}$.
Il vient donc :
$\mathbf{P}(X=k, Y=\ell) = \sum_{n=k+\ell}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times \binom{n-k}{\ell} \left(\frac{q}{1-p}\right)^{\ell} \left(\frac{r}{1-p}\right)^{n-k-\ell}$.
On simplifie les facteurs $(1-p)$ et on effectue un glissement d'indices :
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=k, Y=\ell) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+k+\ell}}{(n+k+\ell)!} \times \binom{n+k+\ell}{k} p^k \times \binom{n+\ell}{\ell} q^{\ell} r^n \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \times p^k q^{\ell} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \times r^n \quad \text{en simplifiant les coefficients binomiaux.}\end{aligned}$$
On reconaît la somme d'une série exponentielle :
$\mathbf{P}(X=k, Y=\ell) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \times p^k q^{\ell} e^{\lambda r}$
Conclusion : $\boxed{\forall (k,\ell) \in \mathbf{N}^2,\ \mathbf{P}(X=k, Y=\ell) = \frac{\lambda^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \times p^k q^{\ell} e^{-\lambda(1-r)}}$

11. $\forall (k,\ell) \in \mathbf{N}^2,\ \mathbf{P}(X=k) \times \mathbf{P}(Y=\ell) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \times e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^{\ell}}{\ell!} = \frac{\lambda^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \times p^k q^{\ell} e^{-\lambda(p+q)}$
Et puisque $p+q = 1-r$, on voit que le produit des lois marginales donne la loi conjointe.
En conclusion : $\boxed{\text{les variables } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$

III : Une caractérisation de la loi de Poisson

12. Soit $(k,\ell) \in \mathbf{N}^2$.
$\mathbf{P}(X=k, Y=\ell) = \mathbf{P}(N=k+\ell) \times \mathbf{P}(X=k \,|\, N=k+\ell) = \frac{a_{k+\ell}}{(k+\ell)!} \times \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^{\ell}$.
Conclulsion : $\boxed{\forall (k,\ell) \in \mathbf{N}^2,\ \mathbf{P}(X=k, Y=\ell) = \frac{a_{k+\ell}}{k!\,\ell!}\, p^k (1-p)^{\ell}.}$

13. Par indépendance, $\forall i,j \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X=i, Y=j) = \mathbf{P}(X=i) \times \mathbf{P}(Y=j)$, d'où le résultat.

14. D'après les deux questions précédentes :
$\mathbf{P}(X=k, Y=\ell) \times \mathbf{P}(X=0, Y=0) = \mathbf{P}(X=k, Y=0) \times \mathbf{P}(X=0, Y=\ell)$
$\frac{a_{k+\ell}}{k!\,\ell!}\, p^k (1-p)^{\ell} \times a_0 = \frac{a_k}{k!}\, p^k \times \frac{a_{\ell}}{\ell!}\, (1-p)^{\ell}$. Après simplifications : $\boxed{\forall (k,\ell) \in \mathbf{N}^2,\ a_{k+\ell} \times a_0 = a_k \times a_{\ell}.}$

15. On pose $\ell = 1$ dans le résultat de la question précédente :
$\forall k \in \mathbf{N},\ a_{k+1} = \frac{a_1}{a_0} \times a_k$. La suite $(a_k)_{k \geqslant 0}$ est donc géométrique de raison $c = \frac{a_1}{a_0}$.
En conséquence, $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = a_o c^n.}$

16. On a donc : $\forall n \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(N=n) = \frac{a_n}{n!} = a_0 \frac{c^n}{n!}$.
Par σ-additivité, $\mathbf{P}(\Omega) = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N=n) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c^n}{n!}$.
En reconnaissant une série exponentielle, on trouve : $1 = a_0 e^c$ donc $\boxed{a_0 = e^{-c}.}$
Finalement, $\forall n \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(N=n) = e^{-c} \frac{c^n}{n!}$ donc $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{P}(c).}$

Exercice : Une loi sans espérance et l'effet du minimum

1. On trouve l'identité usuelle : $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n(n+1)} \geqslant 0$.

   Il s'agit donc de montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ converge, et a pour somme 1.

   Soit $N \geqslant 1$, et T_N la somme partielle de rang N :

   $T_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$ en repérant un télescopage.

   $\lim \dfrac{1}{N+1} = 0$ donc par définition d'une série convergente :

   la série de terme général $\dfrac{1}{n(n+1)}$ converge, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

   En conclusion, $\boxed{\text{la relation } (\mathcal{R}) \text{ définit bien une loi de probabilité.}}$

3. Soit $n \geqslant 1$, on demande $F_X(n) = \mathbf{P}(X \leqslant n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

   en utilisant le même télescopage. Ainsi : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ F_X(n) = 1 - \dfrac{1}{n+1}.}$

   On en déduit que : $\mathbf{P}(X \geqslant n) = 1 - \mathbf{P}(X < n) = 1 - F_X(n-1) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$.

4. On pose $u_n = n \times \mathbf{P}(X = n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

   Alors $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et la série de terme général u_n est la série harmonique, divergente.

   En conséquence, $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

5. Soit $n \geqslant 1$. L'événement $[M_r \geqslant n]$ est l'intersection : $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} [X_k \geqslant n]$.

   En passant aux probabilités, et par indépendance mutuelle des variables X_k :

   $\mathbf{P}(M_r \geqslant n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \mathbf{P}(X_k \geqslant n) = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{n}$. On reconnaît un produit de constantes : $\forall n \geqslant 1,\ \mathbf{P}(M_r \geqslant n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^r$.

   M_r est à valeurs entières, donc : $\mathbf{P}(M_r = n) = \mathbf{P}(M_r \geqslant n) - \mathbf{P}(M_r \geqslant n+1)$.

   En conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \mathbf{P}(M_r = n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^r - \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^r.}$

6. Soit $N \geqslant 1$. D'après la question précédente, $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n \times \left(\frac{1}{n^r} - \frac{1}{(n+1)^r}\right)$.

   Par linéarité : $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{n}\right)^r - \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{n+1}\right)^r$.

   On effectue un glissement d'indices dans la deuxième somme, et on repère un télescopage :

   $$S_N = \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{n}\right)^r - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^r = \sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{n}\right)^r - \sum_{n=2}^{N+1} n\left(\frac{1}{n}\right)^r + \sum_{n=2}^{N+1} \left(\frac{1}{n}\right)^r$$
   $$= 1 - \frac{N+1}{(N+1)^r} + \sum_{n=2}^{N+1} \left(\frac{1}{n}\right)^r = \sum_{n=1}^{N+1} \left(\frac{1}{n}\right)^r - \frac{1}{(N+1)^{r-1}}.$$

7. Soit $r \in \mathbf{N}^\star$. On sait que la série de terme général $\dfrac{1}{n^r}$ converge si et seulement si $r \geqslant 2$.

   De plus, $\dfrac{1}{(N+1)^{r-1}}$ converge pour tout $r \geqslant 1$. En conclusion : $(S_N)_{N \geqslant 1}$ converge si et seulement si $r \geqslant 2$,

   donc $\boxed{M_r \text{ admet une espérance si et seulement si } r \geqslant 2.}$

   Dans ce cas, $\lim \dfrac{1}{(N+1)^{r-1}} = 0$ donc $\boxed{\forall r \geqslant 2,\ \mathbf{E}(M_r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^r}.}$

8. Pour tout $r \geqslant 2$ et pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{n^{r+1}} \leqslant \dfrac{1}{n^r}$.

   Puisque ce sont les termes de séries convergentes, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{r+1}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^r}$, c'est-à-dire : $\mathbf{E}(M_{r+1}) \leqslant \mathbf{E}(M_r)$.

   $\boxed{\text{La suite } (\mathbf{E}(M_r))_{r \geqslant 2} \text{ est donc décroissante.}}$

9. Étant minorée par 0, cette suite converge.

   Pour tout $n \geqslant 2$, on a : $n^r = n^2 \times n^{r-2} \geqslant n^2 \times 2^{r-2}$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{n^r} \leqslant \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{1}{2^{r-2}}$.

   On a donc : $0 \leqslant \mathbf{E}(M_r) - 1 \leqslant \dfrac{1}{2^{r-2}} \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

   $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{1}{2^{r-2}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{r \to +\infty} \mathbf{E}(M_r) = 1.}$