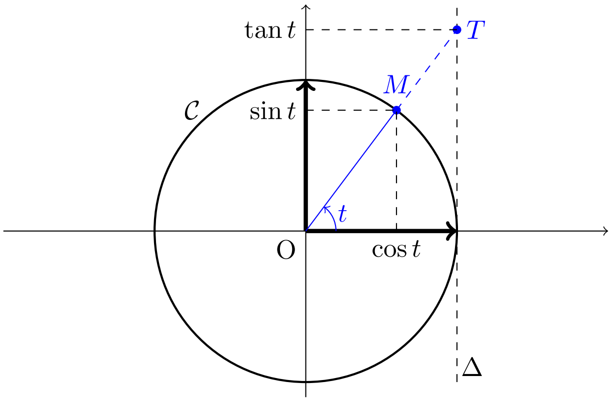
I Rappels de trigonométrie

1 Définitions

DÉFINITION

Dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan, le **cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1. À tout réel t, on associe le point M de $\mathcal{C}$ défini par $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right) = t$.
Le point T (s'il existe) est le point d'intersection de la droite (OM) et de la droite verticale Δ d'équation $x = 1$. On appelle :

- **cosinus de** t, et on note $\cos(t)$, l'abscisse de M ;
- **sinus de** t, et on note $\sin(t)$, l'ordonnée de M ;
- **tangente de** t, et on note $\tan(t)$, l'ordonnée de T.



2 Propriétés

PROPOSITION

- Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbf{R}$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a : $\boxed{\sin' = \cos \text{ et } \cos' = -\sin}$
- La fonction tan est définie sur $D_{\tan} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$$\boxed{\forall t \in D_{\tan},\ \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \text{et} \quad \tan' t = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}}$$

- [dérivées de composées] Si u est une fonction dérivable sur un intervalle réel I, alors $\sin(u)$ et $\cos(u)$ sont dérivables sur I et : $\boxed{(\sin u)' = u' \times \cos u \quad \text{et} \quad (\cos u)' = -u' \times \sin u}$

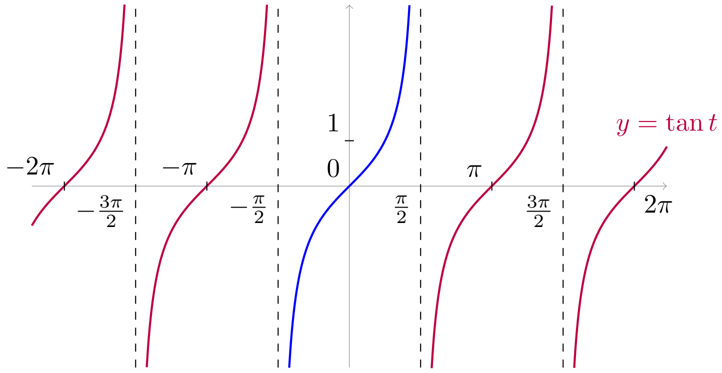
  Si de plus u est à valeurs dans $D_{\tan}$, alors $\tan(u)$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{(\tan u)' = u' \times (1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2(u)}}$$

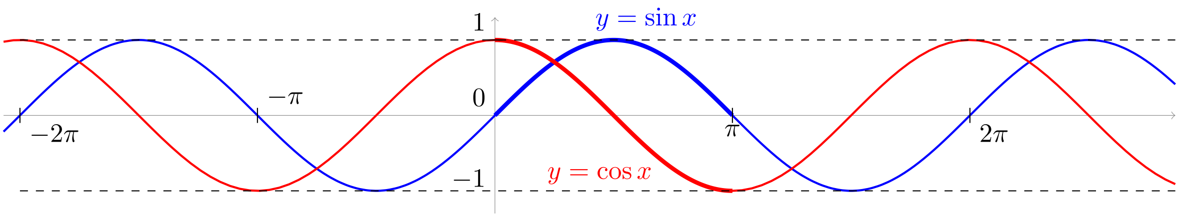
- [encadrement] $\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ -1 \leqslant \sin t \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \cos t \leqslant 1}$
- [Pythagore] $\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1}$
- [périodicité] sin et cos sont 2π-périodiques, tan est π-périodique :
  $\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ \sin(t + 2\pi) = \sin t \ \text{ et } \ \cos(t + 2\pi) = \cos t}$ et $\boxed{\forall t \in D_{\tan},\ \tan(t + \pi) = \tan t}$
- [parité] sin et tan sont impaires, cos est paire :
  $\boxed{\forall t \in \mathbf{R},\ \sin(-t) = -\sin t \ \text{ et } \ \cos(-t) = \cos t}$ et $\boxed{\forall t \in D_{\tan},\ \tan(-t) = -\tan t}$
- [symétries] $\boxed{* \ \forall t \in \mathbf{R},\ \sin(t + \pi) = -\sin t \ \text{ et } \ \cos(t + \pi) = -\cos t}$
  $\boxed{* \ \forall t \in \mathbf{R},\ \sin(\pi - t) = \sin t \ \text{ et } \ \cos(\pi - t) = -\cos t}$
  $\boxed{* \ \forall t \in \mathbf{R},\ \sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t \ \text{ et } \ \cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t}$
  $\boxed{* \ \forall t \in \mathbf{R},\ \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t \ \text{ et } \ \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t}$
- [équivalents en 0] $\boxed{\sin(t) \underset{0}{\sim} t\,,\ \tan(t) \underset{0}{\sim} t \quad \text{et} \quad \cos(t) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}t^2}$
- [DL en 0] $\boxed{\sin(t) \underset{0}{=} t - \frac{1}{6}t^3 + \mathrm{o}(t^4) \quad \text{et} \quad \cos(t) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}t^2 + \mathrm{o}(t^3)}$

3 Valeurs remarquables

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$



4 Courbes représentatives



5 Formulaire de trigonométrie

<u>5.1 Formules d'addition</u>

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}$$

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}$$

$$\boxed{\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)}$$

<u>5.2 Formules de duplication</u>

$$\boxed{\cos(2a) = \begin{cases} \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ 2\cos^2(a) - 1 \\ 1 - 2\sin^2(a) \end{cases}}$$

$$\boxed{\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)}$$

<u>5.3 Formules de linéarisation</u>

$$\cos(a)\cos(b) = \tfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \tfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \tfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\boxed{\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}}$$

$$\boxed{\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}}$$

6 Trigonométrie réciproque

Propriété

- $\sin$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1,1]$. Sa bijection réciproque s'appelle **Arcsinus**.

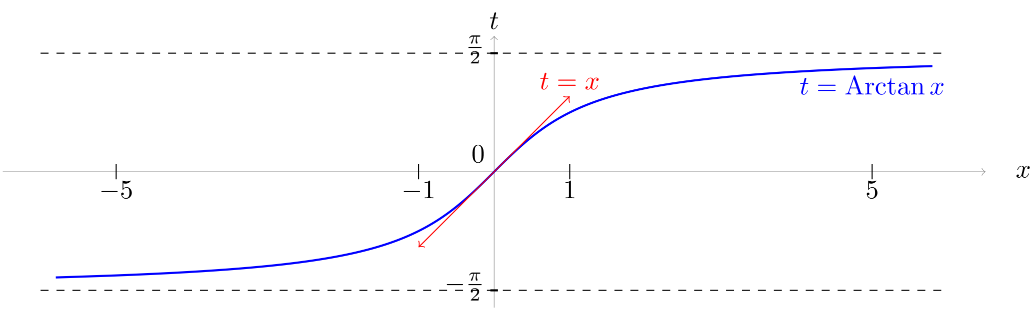
$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \forall t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],\ \sin(t) = x \Leftrightarrow t = \operatorname{Arcsin}(x)}$$

- $\cos$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ vers $[-1,1]$. Sa bijection réciproque s'appelle **Arccosinus**.

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \forall t \in [0,\pi],\ \cos(t) = x \Leftrightarrow t = \operatorname{Arccos}(x)}$$

- $\tan$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbf{R}$. Sa bijection réciproque s'appelle **Arctangente**.

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \forall t \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[,\ \tan(t) = x \Leftrightarrow t = \operatorname{Arctan}(x)}$$



$$\boxed{\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{Arctan} u)' = \frac{u'}{1+u^2} \qquad \operatorname{Arctan} x \underset{0}{=} x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + o(x^6)}$$

II Rappels sur les nombres complexes

1 Définitions

Définition

i est un nombre vérifiant $\boxed{i^2 = -1}$.
Un **nombre complexe** est de la forme $z = a + ib$ où a, b sont des réels.
$a + ib$ est la **forme algébrique** de z, a est sa **partie réelle** et b sa **partie imaginaire**.
$\mathbf{C} = \{a + ib,\ a, b \in \mathbf{R}\}$ est l'ensemble des nombres complexes. On a : $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
$i\mathbf{R} = \{ib,\ b \in \mathbf{R}\}$ est l'ensemble des **imaginaires purs**.

* Addition dans $\mathbf{C}$: $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$
* Multiplication dans $\mathbf{C}$: $(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
* **Conjugué** dans $\mathbf{C}$: $\overline{a + ib} = a - ib$
* **Module** dans $\mathbf{C}$: $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ Le module prolonge à $\mathbf{C}$ la valeur absolue dans $\mathbf{R}$.

2 Propriétés

Propriétés du conjugué Soient $z, z' \in \mathbf{C}$. Alors :

* $\overline{\overline{z}} = z$
* $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
* $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
* $\forall n \in \mathbf{N},\ \overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$
* $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$
* $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$
* $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
* $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
* $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
* $z \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0$

Propriétés du module Soient $z, z' \in \mathbf{C}$. Alors :

* $|z| \in \mathbf{R}_+$
* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$
* $\begin{cases} |\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \\ |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \end{cases}$
* $|\overline{z}| = |-z| = |z|$
* $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
* $\forall n \in \mathbf{N},\ |z^n| = |z|^n$
* $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ si $z \neq 0$
* $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ si $z \neq 0$
* $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

Propriétés autres

* Forme algébrique de l'inverse : si $z = a + ib \neq 0$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
* Identité remarquable : $\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2,\ a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$ $\boxed{|z|^2 = z\,\overline{z}}$ ou $\boxed{|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}}$
* $\forall z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

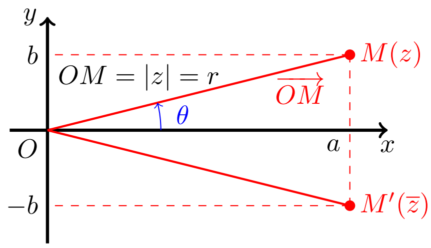
3 Aspect géométrique

Définition

Dans le **plan complexe**, le point $M(a, b)$ est **l'image** du complexe $z = a + ib$. Ce complexe z est **l'affixe** du point M.
Le module $|z|$ est la distance OM : $|z| = OM = ||\overrightarrow{OM}||$.
L'angle $\theta = (Ox, \overrightarrow{OM})$ est un **argument** de z.
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.
$\mathbb{U}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique.
Forme trigonométrique d'un complexe :

$$z = |z| \times (cos\theta + i \sin\theta)$$

Notation d'Euler : $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$
Forme exponentielle d'un complexe : $z = |z| \times e^{i\theta} = re^{i\theta}$



Propriété

* **Égalité** sous forme exponentielle : $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
* **Conjugué** : $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ **Inverse** : $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
* **Formules d'Euler** : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Propriété

* **Produit** : $(re^{i\theta}) \times (r'e^{i\theta'}) = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ **Quotient** : $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
* **Puissances** : $(re^{i\theta})^n = r^n e^{ni\theta}$
* **Formule de Moivre** : $\forall n \in \mathbf{Z},\ (re^{i\theta})^n = r^n e^{ni\theta}$

  donc $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
* **Liens entre formes algébrique et géométrique** : $z = a + ib = re^{i\theta}$

  $$r = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sin\theta = \frac{b}{r} \qquad a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta$$

4 Techniques de calcul dans C

a Expressions en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{ni\theta} = (e^{i\theta})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\theta)^k (i\sin\theta)^{n-k} \quad \textbf{(binôme de Newton)}$$

donc en **identifiant** parties réelles et imaginaires, on obtient les expressions de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

b Linéarisation de $(\cos^p(m\theta)) \times (\sin^q(n\theta))$

On utilise les **formules d'Euler** : $(\cos^p(m\theta)) \times (\sin^q(n\theta)) = \left(\dfrac{e^{mi\theta}+e^{-mi\theta}}{2}\right)^p \times \left(\dfrac{e^{ni\theta}-e^{-ni\theta}}{2i}\right)^q$

puis la **formule de Newton** pour développer et encore les formules d'Euler pour regrouper.
On peut enfin exprimer le résultat sans puissance (utile par exemple pour déterminer une primitive).

c Transformation de Fresnel

Propriété

Soit $z = a + ib = re^{i\theta} \in \mathbf{C}^*$. Alors : $\forall t \in \mathbf{R},\ a\cos t + b\sin t = r\cos(t-\theta)$.

Ceci montre qu'une **combinaison linéaire** de cos et sin est encore une fonction trigonométrique.

d Équations du second degré dans C

Proposition

Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ avec $a \neq 0$. L'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- 2 solutions réelles $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$
- une unique solution-double (réelle) $z_0 = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$
- 2 solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1}$ si $\Delta < 0$.

Factorisation : Si $\Delta \neq 0,\ az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$. Si $\Delta = 0,\ az^2+bz+c = a(z-z_0)^2$.

Relations coefficients-racines : $z_1 + z_2$ ou $2z_0 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2$ ou $(z_0)^2 = \frac{c}{a}$.

Remarque : une équation du second degré à coefficients complexes se traite de la même façon, en trouvant $\delta \in \mathbf{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$ (*voir ci-dessous*).

e Racines n-ème dans C

Soit $Z = A + iB = Re^{i\varphi}$ un complexe non nul fixé, et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit (E) l'équation : $z^n = Z$.

On cherche z sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$. On a donc : $(E) \Leftrightarrow r^n e^{ni\theta} = Re^{i\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} r = R^{1/n} \\ \theta = \varphi/n + 2k\pi/n,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$

Cas où $n = 2$: on peut aussi chercher $z = a + ib$ sous forme algébrique : $\begin{cases} a^2 - b^2 = A & (1) \\ 2ab = B & (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{A^2+B^2} & (3) \end{cases}$

En effectuant $(1) + (3)$ on trouve a^2 et on peut conclure.

III Exercices

Exercice 1 : Déterminer module et argument de : $z = \dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2 : 1) Déterminer les formes agébrique et exponentielle de : $z = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$

2) Soit $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Calculer z^2 et en déduire la forme exponentielle de z.

Exercice 3 : Déterminer les racines carrées de $z_1 = 1+i$, $z_2 = 45 - 25i$ et $z_3 = \dfrac{1+i}{1-i}$.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations $z^3 = 1$ et $z^7 - 1 = 0$.

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations :

- $z^2 + z + 1 = 0$
- $z^3 = -(2+i)^3$
- $1 + \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) + \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 = 0.$

Exercice 6 : Pour tout réel x, on pose $\varphi(x) = e^{zx}$ où $z \in \mathbf{C}$. Déterminer la dérivée de φ.

Exercice 7 : Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

- $2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ dans $\mathbf{R}$,
- $\sin x \leqslant -\dfrac{1}{2}$ dans $[0, 2\pi]$.

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$.

Exercice 9 : Linéariser les expressions suivantes :

- $(\cos x)^4$
- $\cos(2x)(\sin(3x))^2$

Exercice 10 : Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$, puis $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin\theta$.
En utilisant le fait que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, en déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 11 : Soient $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$. On pose $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

1. Calculer $A_n(x) + iB_n(x)$.
2. En déduire $A_n(x)$ et $B_n(x)$ pour tout réel x.