I Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1 Définition

Définition

Soient a, b deux réels tels que $a < b$. On pose $I = [a, b]$ le segment d'extrémités a et b.
Soit f une fonction **continue** sur I. Soit F une primitive de f sur I.
Alors le réel $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F.
On l'appelle **intégrale de** f **entre** a **et** b. On note : $\displaystyle\int_a^b f = \big[F\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Notations : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \dots$ la **variable d'intégration** $x, t, \dots$ peut être précisée ou omise s'il n'y a pas d'ambiguïté.

2 Propriétés de l'intégrale

Proposition

- $*$ Chasles : $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.
- $*$ Bornes : $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$. $\boxed{\textbf{Dans toute la suite} : a \leqslant b.}$
- $*$ Linéarité : $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b]),\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Alors : $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
- $*$ Croissance, positivité : $\displaystyle f \geqslant g \Rightarrow \int_a^b f \geqslant \int_a^b g$. $\displaystyle f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$.
- $*$ Encadrement : $\displaystyle m = \inf_{x\in[a,b]} f(x),\ M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \Rightarrow m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a)$
- $*$ Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
- $*$ Valeur moyenne : $\displaystyle\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$
- $*$ Théorème de la moyenne : $\exists c \in [a, b],\ \mu = f(c)$.

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

- $\displaystyle I_1 = \int_{-2}^{3} |x|\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle I_2 = \int_2^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$
- $\displaystyle I_3 = \int_a^b \lambda\,\mathrm{d}u$ où a, b, λ sont des réels fixés.

3 Théorème fondamental de l'analyse

Proposition

Soit f une fonction continue sur un intervalle réel I. Soit $a \in I$.
Alors la fonction $\displaystyle x \longmapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
L'ensemble des primitives de f sur I est : $\displaystyle\left\{x \longmapsto \int_a^x f + \alpha,\ \alpha \in \mathbf{R}\right\}$.

Proposition $**$ **Dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale** $**$

Soit $\displaystyle F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, avec f continue entre $u(x)$ et $v(x)$.
Si u et v sont dérivables en x, alors F est dérivable en x et :

$$F'(x) = v'(x) \times f \circ v(x) - u'(x) \times f \circ u(x).$$

Exercice 2 : Étudier la fonction F d'expression $\displaystyle F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

4 Interprétation en terme d'aires

PROPOSITION

> Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, **positive** sur $[a,b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f$ est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$.
>
> Si $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ est de signe quelconque, alors $\displaystyle\int_a^b f$ est la différence entre les aires des parties du plan délimitées par $\mathcal{C}_f$ situées au-dessus de l'axe des abscisses, et celles situées en-dessous.

Exemples : • si f est continue sur $[-a,a]$ et impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f = 0$.

• si f est continue sur $[-a,a]$ et paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.

II Techniques de calcul intégral

1 Intégration "à vue"

$f(x) = \dots$	$F(x) = \dots$	$[a,b] \subset \dots$
x^α, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	*voir ci-dessous*
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\mathbf{R}_+^\star$ ou $\mathbf{R}_-^\star$
e^x	$e^x + C$	$\mathbf{R}$
$\ln x$	$x\ln x - x + C$	$\mathbf{R}_+^\star$

$\alpha \in \mathbf{N}$: sur $\mathbf{R}$

$\alpha \in \mathbf{Z}_-^\star$: sur $\mathbf{R}_+^\star$ ou $\mathbf{R}_-^\star$

$\alpha = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbf{N}^\star$: $\begin{cases} n \text{ pair} : \text{sur } \mathbf{R}_+ \\ n \text{ impair} : \text{sur } \mathbf{R} \end{cases}$

$\alpha = -\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbf{N}^\star$: $\begin{cases} n \text{ pair} : \text{sur } \mathbf{R}_+^\star \\ n \text{ impair} : \text{sur } \mathbf{R}_+^\star \text{ ou } \mathbf{R}_-^\star \end{cases}$

α quelconque : sur $\mathbf{R}_+^\star$

$f(x) = \dots$	$F(x) = \dots$	$[a,b] \subset \dots$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\mathcal{D}_{\tan}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbf{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$	$\mathcal{D}_{\tan}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x + C$	$\mathbf{R}$

fonction	primitives
$u'u^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C$

fonction	primitives
$u'e^u$	$e^u + C$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{Arctan} u + C$

fonction	primitives
$u'\cos u$	$\sin u + C$
$u'\sin u$	$-\cos u + C$
$u'\tan u$	$-\ln\lvert\cos u\rvert + C$

2 Intégration "par parties" (IPP)

$$\boxed{u,v \in \mathcal{C}^1([a,b]) : \int_a^b u'\,v = \big[u\,v\big]_a^b - \int_a^b u\,v'}$$

Exercice 3 : Calculer • $I_4 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} t^2 \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$ • $I_5 = \displaystyle\int_1^e t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbf{N})$

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
3. En déduire une expression de I_n en fonction de n.

3 Changement de variables (CDV)

$\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ à valeurs dans $[c,d]$ et $f \in \mathcal{C}^0([c,d])$. Alors : $\displaystyle\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5 : Calculer • $I_6 = \displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ • $I_7 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^3\,\mathrm{d}t$

4 Compléments hors-programme

• **Polynômes trigonométriques** Soit à déterminer $\int (\cos t)^p (\sin t)^q \,\mathrm{d}t$ où $p, q \in \mathbf{N}$.

- Si p est un entier impair, on écrit : $(\cos t)^p = \cos t \times (\cos t)^{p-1}$ avec $p-1$ pair : $p-1 = 2r$ où $r \in \mathbf{N}$ donc $(\cos t)^{p-1} = (\cos^2 t)^r = (1-\sin^2 t)^r$ et on developpe pour intégrer à vue $\cos t \times (\sin t)^k$.
- Si q est un entier impair, même chose avec $(\sin t)^q = \sin t \times (1-\cos^2 t)^r$.
- Si p, q sont pairs : on **linéarise** l'expression $(\cos t)^p (\sin t)^q$ (voir *Chapitre 1*) et on intègre à vue.

Exercice 6 : Déterminer des primitives de $f : t \mapsto (\sin t)^4 (\cos t)^3$ et de $g : t \mapsto (\sin t)^2 (\cos t)^2$.

• **Intégrale complexe** On définit pour $z = a + ib \in \mathbf{C}$: $e^z = e^{a+ib} = e^a \times e^{ib} = e^a\,(\cos b + i \sin b)$

Pour $z \in \mathbf{C}^\star$, on peut intégrer à vue : $\displaystyle\int e^{zt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z} e^{zt} = \int e^{at}\big(\cos(bt) + i \sin(bt)\big)\,\mathrm{d}t$

On peut **identifier parties réelles et imaginaires** :

$$\int e^{at}\cos(bt)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int e^{zt}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}e^{zt}\right) \text{ et } \int e^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int e^{zt}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}e^{zt}\right)$$

Exercice 7 : Calculer $I_8 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) e^x \,\mathrm{d}x$.

• Intégrales portant sur des fractions rationnelles $\dfrac{P}{Q}$ où $\deg(Q) = 1$

On trouve un polynôme T tel que : $\dfrac{P}{Q} = T + \dfrac{R}{Q}$ avec R un polynôme constant. On intègre ensuite à vue.

Exercice 8 : Calculer • $I_9 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ • $I_{10} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$

• Intégrales portant sur des fractions rationnelles $\dfrac{P}{Q}$ où $\deg(Q) = 2$: $Q(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.

On trouve un polynôme T tel que : $\dfrac{P}{Q} = T + \dfrac{R}{Q}$ avec $\deg(R) \leqslant 1$: $R(x) = cx + d$ ($c, d \in \mathbf{R}$).

On fait apparaître Q' au numérateur : $\dfrac{R}{Q} = \alpha \dfrac{Q'}{Q} + \beta \dfrac{1}{Q}$ avec α, β des réels.

$\dfrac{Q'}{Q}$ s'intègre à vue, et pour $\displaystyle\int \frac{1}{Q}$, trois cas se présentent :

- $*$ $\Delta = b^2 - 4ac = 0$: alors $Q(x) = a(x - x_0)^2$ et on intègre à vue
- $*$ $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: alors $Q(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ et on trouve γ, δ tels que $\dfrac{1}{Q} = \dfrac{\gamma}{x-x_1} + \dfrac{\delta}{x-x_2}$
- $*$ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: alors on utilise la forme canonique $Q(x) = a\big((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\big)$
  qui donne après factorisation : $\dfrac{1}{Q} = \dfrac{-\frac{4a}{\Delta}}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1}$ et on effectue le CDV $t = \dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$.

Exercice 9 : Calculer • $I_{11} = \displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x}$ • $I_{12} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

III Sommes de Riemann

Soit f continue sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f = \lim \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Dans un exercice de math, ces formules seront toujours utilisées sur le segment $[0, 1]$:

$$\boxed{\int_0^1 f = \lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Exercice 10 : Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{4n^2 + k^2}$.

Traitement informatique : le script ci-dessous renvoie une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f$

```
def integrale(f,a,b,n) :
    S = 0
    for k in range(n) :
        xk = a + k*(b-a)/n
        S += f(xk)
    return S*(b-a)/n
```

IV Équations différentielles linéaires

1 Définitions

DÉFINITION

Une **équation différentielle linéaire** est une équation de la forme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(t)y^{(k)}(t) = b(t) \quad (E)$
où y est une fonction inconnue n fois dérivable, et où $a_0, \dots, a_n$ et b sont des fonctions continues.
Les fonctions $a_k (k \in [\![0, n]\!])$ sont les **coefficients** de (E), b est le **second membre** de (E).
L'équation différentielle (E) est définie pour une variable $t \in I$ où I est un intervalle réel.
Si a_n n'est pas la fonction nulle, n est **l'ordre** de l'équation différentielle (E).

On notera **EDL**$_n$ une équation différentielle linéaire d'ordre n.

DÉFINITION

Soit (E) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b$ une **EDL**$_n$. Soit (H) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$.
Alors (H) est l'équation différentielle linéaire **homogène** associée à (E). On la note : **EDLH**.

Remarque : La fonction nulle est toujours solution d'une **EDLH**.

2 Théorème de structure

THÉORÈME

Soit (E) une **EDL**, soit (H) son **EDLH** associée, d'ensemble-solution $\mathcal{S}_{(H)}$.
Alors l'ensemble-solution de (E) est de la forme : $\mathcal{S}_{(E)} = \left\{y_H + y_p,\ y_H \in \mathcal{S}_{(H)}\right\}$
où y_p est **n'importe quelle** solution de (E).

3 Principe de superposition

PROPOSITION

Si (E_1) et (E_2) sont deux **EDL** de même **EDLH** et de seconds membres respectifs b_1 et b_2, si y_1 et y_2 sont des solutions particulières respectivement de (E_1) et (E_2), alors $y_3 = y_1 + y_2$ est solution de (E_3), **EDL** de même **EDLH** et de second membre $b_1 + b_2$.

V Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1 EDLH$_1$

THÉORÈME

Soit a une fonction continue sur un intervalle réel I, soit $(H) : y' + a(t)y = 0$.
Alors $\mathcal{S}_{(H)} = \left\{t \longmapsto Ke^{-A(t)},\ \ K \in \mathbf{R}\right\}$, où A est une primitive quelconque de a sur I.

2 Méthode de variation de la constante (MVC)

Pour résoudre l'**EDL**$_1$ $\quad (E) :\ y' + a(t)y = b(t)$:

* on résout $(H) :\ y' + a(t)y = 0$. On trouve $y = Ke^{-A(t)}, \quad K \in \mathbf{R}, \quad$ avec $A' = a$.
* on remplace la constante K par une fonction dérivable $K(t)$.
* on dérive $y = K(t)e^{-A(t)}$ et on réinjecte dans (E), puis **on simplifie**.
* on trouve $K'(t) = b(t)e^{A(t)}$, qu'on cherche à intégrer pour trouver $K(t)$.
* on applique le théorème de structure avec $y_H = Ke^{-A(t)}$ et $y_p = K(t)e^{-A(t)}$.

3 Théorème de Cauchy "linéaire"

Soit I un intervalle sur lequel on définit (E) une **EDL**$_1$.

Soient $t_0 \in I,\ y_0 \in \mathbf{R}$. Alors il existe une unique solution y de (E) vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

VI Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1 Résolution de l'EDLH$_2$: $ay'' + by' + cy = 0$, a, b, c réels, $a \neq 0$

On pose $ar^2 + br + c = 0$ l'**équation caractéristique** de (H), de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et $\mathcal{S}_{(H)} = \{t \longmapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},\ (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une solution-double réelle r_0 et $\mathcal{S}_{(H)} = \{t \longmapsto (At + B)e^{r_0 t},\ (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha - i\beta$ et $\mathcal{S}_{(H)} = \{t \longmapsto e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)),\ (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$.

2 Résolution de l'EDL$_2$: $ay'' + by' + cy = d(t)$, a, b, c réels, $a \neq 0$, et d continue

$*$ Le théorème de structure s'applique.

$*$ Si d est constante, on cherche y_p sous forme d'une constante.

$*$ Sinon, **on suit les indications de l'énoncé** pour trouver y_p.

$*$ On doit penser au principe de superposition lorsque $d(t) = d_1(t) + d_2(t)$.

3 Théorème de Cauchy "linéaire"

Soit (E) une EDL$_2$ définie sur un intervalle I. Soient $t_0 \in I,\ y_0, y'_0 \in \mathbf{R}$.
Alors il existe une unique solution y de (E) vérifiant les conditions initiales $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$

VII Exercices sur les équations différentielles

1 Équation différentielle d'ordre 1

Résoudre sur un intervalle à préciser les équations différentielles suivantes :

1. $y' = ty - t$ vérifiant de plus : $y(0) = 2$
2. $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$
3. $ty' - y + (t^2 - 2t)\sqrt{y} = 0$ *après avoir divisé par* $\sqrt{y}$, *on posera :* $z = \sqrt{y}$
4. $y' + (1 - 2t)e^{-y} + 3 = 0$ *poser :* $z = e^y$

2 Équation différentielle d'ordre 2

Résoudre sur un intervalle à préciser les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 6$ vérifiant de plus : $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = (t + 1)e^t$ *on cherchera une solution particulière de la forme :* $t \mapsto (at + b)e^t$
3. $2y'' - 6y' + 5y = e^t - 5t + 16$ vérifiant : $y(0) = y'(0) = 5$
   utiliser une fonction de la forme : $t \mapsto \lambda e^t$
4. $y'' + \dfrac{(y')^2}{y} - 4y' + 2y = 0$ *multiplier par* y *et poser :* $z = y^2$