Devoir Maison n°1

Exercice 1 : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. **Étude des variations de f :**
   (a) Étudier la dérivabilité de f et déterminer sa fonction dérivée f'.
   (b) Étudier la fonction φ définie par $\varphi(x) = 1 + e^x - xe^x$ (tableau de variations, limites).
   (c) En déduire qu'il existe un unique réel a tel que $f'(a) = 0$. Montrer que : $a \in]1,2[$ et $f(a) = e^{-a}$.
   (d) Dresser le tableau de variations complet de f.
2. **Étude locale en 0 :**
   (a) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en 0.
   (b) Déterminer un développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
   (c) En déduire la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. **Étude en $-\infty$ et représentation graphique :**
   (a) Déterminer un équivalent de $f(x) - x$ en $-\infty$.
   (b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et préciser les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
   (c) En utilisant les résultats précédents, tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.
   On donne : $a \approx 1,3$. On pourra utiliser un repère non orthonormé.
4. **Approximation de a :** Soit h la fonction définie par : $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) = 1 + e^{-x}$.
   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
   (a) Prouver que a est l'unique solution de l'équation : $h(x) = x$.
   (b) Montrer que : $\forall x \geqslant 1$, $|h'(x)| \leqslant e^{-1}$.
   (c) Déduire des 2 questions précédentes que : $\forall x \geqslant 1$, $|h(x) - a| \leqslant e^{-1}|x - a|$.
   On pourra utiliser l'IAF sur l'intervalle de bornes a et x.
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $|u_{n+1} - a| \leqslant e^{-1}|u_n - a|$.
   (e) Montrer que : $a - 1 < e^{-1}$.
   (f) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $|u_n - a| \leqslant e^{-(n+1)}$.
   (g) En déduire le comportement asymptotique de la suite (u_n).

Exercice 2 : Valeurs particulières de cos et sin

Le but de cet exercice est de calculer : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

On pose : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \omega^k$.

1. Que vaut ω^5 ? En déduire que : $S = 0$.
2. Montrer que : $\cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ et que : $\cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
3. En déduire que : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = -\dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = -\dfrac{1}{4}$.
5. Résoudre dans $\mathbf{C}^2$ le système : $\begin{cases} u + v = -\dfrac{1}{2} \\ uv = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$
6. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.