Corrigé du DM n°1

Exercice 1 : Étude d'une fonction

1. **Variations de f**

   (a) Par opérations, f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et : $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \dfrac{1 \times (1+e^x) - xe^x}{(1+e^x)^2}$.

   $\boxed{\text{Soit : } \forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \dfrac{1+e^x - xe^x}{(1+e^x)^2}.}$

   (b) φ est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ et : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\varphi'(x) = e^x - (e^x + xe^x) = -xe^x$.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 1$ par croissances comparées.
   De plus, $\varphi(x) = 1 + (1-x)e^x$ et $(1-x)e^x \underset{+\infty}{\sim} -xe^x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$.
   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

   (c) D'après **1a**, $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(1+e^x)^2}$ donc $f'(x) = 0 \iff \varphi(x) = 0$.
   Or : $\forall x \leqslant 0, \varphi(x) \geqslant 1$ donc : $\forall x \leqslant 0,\ \varphi(x) \neq 0$.
   Par ailleurs, φ est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbf{R}_+$ et réalise donc une bijection de $\mathbf{R}_+$ vers $\varphi(\mathbf{R}_+) =]-\infty, 2]$.
   $0 \in]-\infty, 2]$ donc 0 admet un unique antécédent a par φ dans $\mathbf{R}_+$.
   De plus, $\varphi(1) = 1 > 0$ et $\varphi(2) = 1 - e^2 < 0$ donc $a \in]1, 2[$.
   Enfin, $1 + e^a = ae^a$ puisque $\varphi(a) = 0$. Ainsi, $f(a) = \dfrac{a}{ae^a} = e^{-a}$.

   $\boxed{\text{Conclusion : } f' \text{ s'annule une unique fois. En ce point } a \in]1,2[, f(a) = e^{-a}.}$

   (d) Par opérations, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{e^x}$ donc par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   D'après les questions précédentes, on obtient le signe de $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(1+e^x)^2}$.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-a}	$\searrow$	0

2. **Étude locale en 0**

   (a) $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{\text{l'équation de la tangente } T \text{ à } \mathcal{C}_f \text{ en } 0 \text{ est : } y = \dfrac{x}{2}.}$

   (b) On a : $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$, donc : $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{x}{2 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)} = \dfrac{x}{2} \times \dfrac{1}{1+t}$

   en posant $t = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2) \longrightarrow 0$

   En utilisant le DL usuel $\dfrac{1}{1+t} \underset{0}{=} 1 - t + t^2 + \mathrm{o}(t^2)$, on obtient :

   $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{x}{2}\left(1 - \dfrac{x}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^3)$. Par troncature : $\boxed{f(x) \underset{0}{=} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \mathrm{o}(x^2)}$

(c) $-\dfrac{x^2}{4} \leqslant 0$ donc au voisinage de 0, $f(x) - \dfrac{x}{2} \leqslant 0$.

On en déduit que $\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C}_f \text{ est localement en-dessous de sa tangente } T.}$

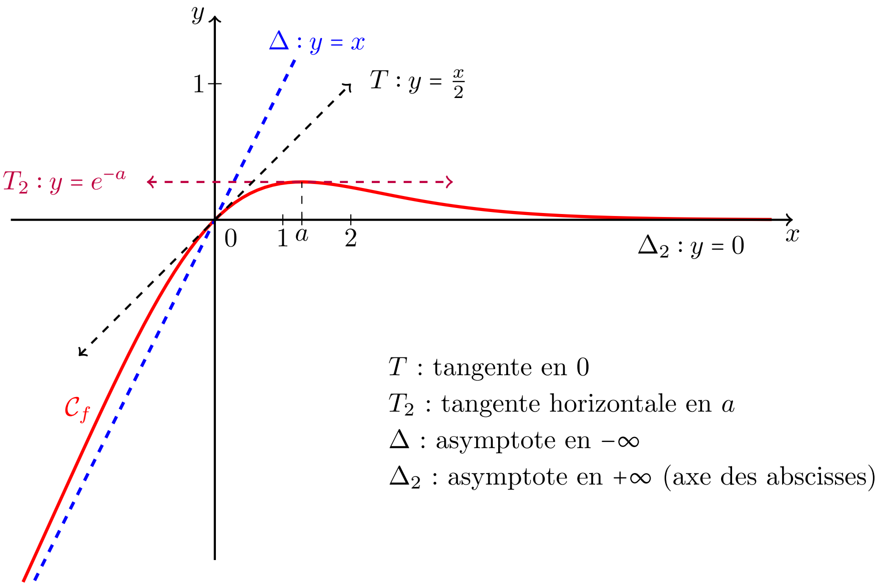
3. **Étude en $-\infty$ et graphe :**

(a) $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) - x = \dfrac{x}{1+e^x} - x = \dfrac{x - x(1+e^x)}{1+e^x} = \dfrac{-xe^x}{1+e^x}$.

Mais $1 + e^x \underset{-\infty}{\sim} 1$, donc par quotient d'équivalents : $\boxed{f(x) - x \underset{-\infty}{\sim} -xe^x.}$

(b) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} -xe^x = 0$ donc la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. De plus, $f(x) - x \geqslant 0$ dès que $x \leqslant 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $\mathbf{R}_-$.

(c) **Représentation graphique de f :**



4. **Approximation de a**

(a) $$\begin{aligned} \varphi(a) = 0 &\iff 1 + (1-a)e^a = 0 \\ &\iff e^{-a} = a - 1 \\ &\iff 1 + e^{-a} = a \end{aligned}$$ $\boxed{a \text{ est l'unique solution de l'équation } h(x) = x.}$

(b) h est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \geqslant 1,\ h'(x) = -e^{-x}$ donc : $\forall x \geqslant 1,\ |h'(x)| \leqslant e^{-1}$.

(c) Soient I le segment de bornes a et x, et $\mathring{I}$ l'intervalle ouvert de bornes a et x.

Alors h est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. D'après l'inégalité des accroissements finis :

$|h(x) - h(a)| \leqslant M.|x - a|$ où M est le sup de $|h'(t)|$ pour $t \in \mathring{I}$.

D'après **4a**, $h(a) = a$, et d'après **4b**, $M \leqslant e^{-1}$. Ainsi : $\boxed{\forall x \geqslant 1,\ |h(x) - a| \leqslant e^{-1}\,|x - a|.}$

(d) $\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) \geqslant 1$ et $u_0 = 1 \geqslant 1$, donc $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geqslant 1$.

On applique le résultat précédent à $x = u_n$: $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ |u_{n+1} - a| \leqslant e^{-1}\,|u_n - a|.}$

(e) $h(a) = a$ donc : $a - 1 = e^{-a}$. De plus, $a > 1$ donc $e^{-a} < e^{-1}$. Ainsi, $a - 1 < e^{-1}$.

(f) Soit $\mathcal{H}_n$: "$|u_n - a| \leqslant e^{-(n+1)}$". Prouvons par récurrence que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- Initialisation : $|u_0 - a| = |1 - a| = a - 1 < e^{-1}$ d'après l'étude précédente. Ainsi, $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
  On sait : $|u_{n+1} - a| \leqslant e^{-1}|u_n - a|$ donc, par hypothèse de récurrence, $|u_{n+1} - a| \leqslant e^{-1} \times e^{-(n+1)}$.
  Donc $|u_{n+1} - a| \leqslant e^{-(n+2)}$, et ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbf{N},\ |u_n - a| \leqslant e^{-(n+1)}.}$

(g) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-(n+1)} = 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ converge et } \lim u_n = a.}$

Exercice 2 : Valeurs particulières de cos et sin

1. $\omega^5 = \left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = e^{\frac{5\times 2i\pi}{5}} = e^{2i\pi} = 1.$ $\boxed{\omega^5 = 1.}$

   $S = \sum_{k=0}^{4} \omega^k$ est une somme géométrique de raison $\omega \neq 1$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{4} \omega^k = \dfrac{1-\omega^5}{1-\omega} = \dfrac{1-1}{1-\omega} = 0$ $\boxed{S = 0.}$

2. Par périodicité de la fonction cos : $\cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{6\pi}{5} - 2\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

   Par parité de cos : $\cos\left(-\dfrac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$. Ainsi : $\boxed{\cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right).}$

   De même : $\cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{8\pi}{5} - 2\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

3. $S = 0$ s'écrit aussi : $1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = 0$.
   En considérant les parties réelles : $1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right) = 0$

   D'après **2**, on a : $1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 0$, ce qui conduit à $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = -\dfrac{1}{2}}$

4. $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$. On pose : $a = \dfrac{4\pi}{5}$ et $b = \dfrac{2\pi}{5}$.

   Il vient : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)\right)$

   donc, vu ce qui précède, $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}}$

5. Le système est un système somme-produit. u et v sont donc les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, où S est la somme $-\frac{1}{2}$ et P le produit $-\frac{1}{4}$.

   Soit $(E) : x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} = 0$, de discriminant $\Delta = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5}{4} > 0$.

   L'équation (E) admet donc deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}{2 \times 1} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

   Les couples (u, v) solutions du système proposé sont : $\boxed{(u,v) = (x_1, x_2) \text{ et } (u,v) = (x_2, x_1)}$.

6. Les questions **3** et **4** prouvent que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ sont des solutions u et v du système.

   Or $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}.}$