I Vocabulaire des applications

DÉFINITION

$*$ Une **application** est une fonction sans valeur interdite. On note $\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D}_f & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ où $A \subset \mathbf{R}$.

$*$ Une **injection** (application injective) est une application qui ne prend jamais 2 fois la même valeur.
$\forall x, x' \in \mathcal{D}_f,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ ou encore $\forall x, x' \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$*$ Une **surjection** (application surjective) est une application qui prend au moins 1 fois chaque valeur de l'ensemble d'arrivée A. $\forall y \in A,\ \exists\, x \in \mathcal{D}_f \mid y = f(x)$

$*$ Une **bijection** de $\mathcal{D}_f$ dans A est une application injective et surjective.
$\forall y \in A,\ \exists!\, x \in \mathcal{D}_f \mid y = f(x)$

$*$ Si f est bijective de A vers B, la **bijection réciproque** de f est l'application de B vers A notée f^{-1} et définie par : $\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$*$ Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont des applications, la **composée** de f par g, notée $g \circ f$, est l'application de A vers C définie par : $\forall x \in A,\ g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$

Exemples usuels :

- $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est injective, mais pas surjective.
- $\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ est surjective, mais pas injective.
- la racine carrée : $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ est bijective, de bijection réciproque le carré : $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$.
- $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+^\star$ et $\ln : \mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$ sont des bijections réciproques.

Méthode : Pour étudier la bijectivité de $f : A \to B$, on considère $y \in B$ et on cherche à résoudre l'équation $f(x) = y$. Si on trouve :

- une unique solution, alors f est bijective, et l'expression de x en fonction de y donne f^{-1},
- au plus une solution, alors f est injective,
- au moins une solution, alors f est surjective.

PROPOSITION

Si f et g sont bijectives et composables, alors $g \circ f$ est bijective, et $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.}$

II Catalogue des fonctions usuelles

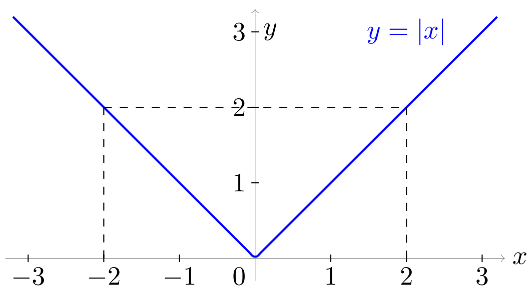
1 Fonction valeur absolue

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\forall x, x' \in \mathbf{R},\ |xx'| = |x| \times |x'|$

$\forall x, x' \in \mathbf{R},\ |x + x'| \leqslant |x| + |x'|$

$\forall \alpha > 0,\ |x| \leqslant \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$
$\Leftrightarrow x \in [-\alpha, \alpha]$



2 Fonction partie entière

La partie entière d'un réel x est l'unique entier n tel que : $n \leqslant x < n + 1$. On note : $n = \lfloor x \rfloor$.

3 Fonctions exponentielles

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbf{R}$, égale à sa dérivée, et valant 1 en 0.
Elle est **strictement croissante** et **strictement positive** sur $\mathbf{R}$.

On a : $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e \approx 2,718$

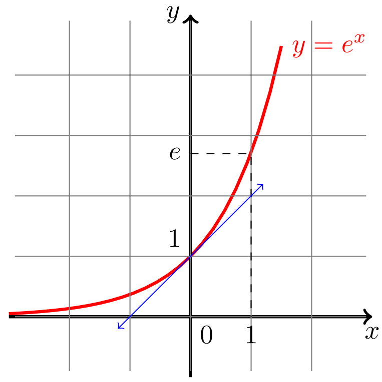
$\lim\limits_{-\infty} \exp = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \exp = +\infty$

On note : $\forall x \in \mathbf{R},\ \exp(x) = e^x$

On a pour tous réels a, b et n :

$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad e^{na} = \left(e^a\right)^n$



Exponentielle de base $a > 0$: $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ a^x = e^{x\ln(a)}}$ FORME EXPONENTIELLE

Méthode : on utilise cette formule à chaque fois que, dans une expression, une puissance est variable.

4 Fonctions logarithmes

La fonction **logarithme népérien** est la primitive sur $\mathbf{R}_+^*$ de la fonction inverse qui s'annule en 1.

$\forall x > 0,\ \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$

ln est **strictement croissante** sur $\mathbf{R}_+^*$.

$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

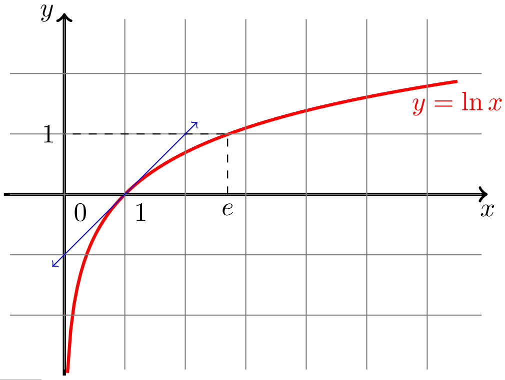
$\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

$\lim\limits_{0} \ln = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln = +\infty$

On a pour tous réels $a, b > 0$ et n :

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$

$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b) \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$



Logarithme de base 10 : $\boxed{\forall x > 0,\ \log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}}$ LOGARITHME DÉCIMAL

5 Fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. p_α est la fonction **puissance** α, d'expression $p_\alpha(x) = x^\alpha$.

$*$ Si $\alpha \in \mathbf{N}$, alors p_α est une fonction polynomiale, définie sur $\mathbf{R}$.

$*$ Si $\alpha \in \mathbf{Z}_-^*$, alors p_α est une fonction rationnelle, définie sur $\mathbf{R}^\star$: $\forall x \neq 0,\ x^\alpha = \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$.

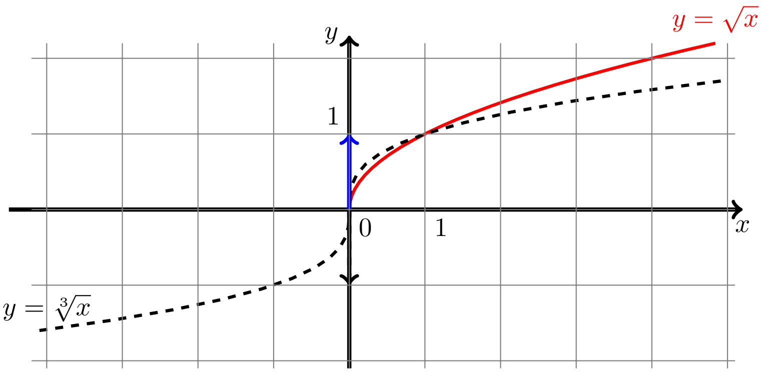
$*$ Si $\alpha = \dfrac{1}{n}$ avec n entier positif **pair**, alors p_α est une **racine** n-ème définie sur $\mathbf{R}_+$: $\forall x \geqslant 0,\ x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

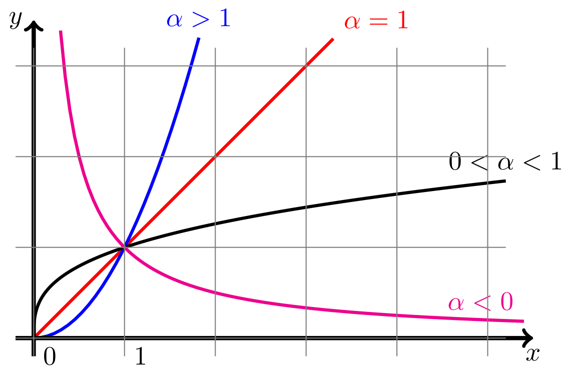
$*$ Si $\alpha = \dfrac{1}{n}$ avec n entier positif **impair**, alors p_α est une **racine** n-ème définie sur $\mathbf{R}$: $\forall x \in \mathbf{R},\ x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

$*$ Sinon, p_α est définie sur $\mathbf{R}_+^*$: $\forall x > 0,\ x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$.

p_α est dérivable sur son ensemble de définition **sauf** en 0 pour les fonctions racines n-ème.

On a alors : $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.





6 Fonctions polynomiales et fonctions rationnelles

DÉFINITION

$*$ Une fonction **polynomiale** est d'expression : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, où $n \in \mathbf{N}$ et $a_k \in \mathbf{R}$.

$*$ Une fonction **rationnelle** est le quotient de deux fonctions polynomiales.
Les éventuelles racines du dénominateur sont appelés les **pôles** de la fonction rationnelle.

III Limites

1 Définitions

Définition

$*$ f a pour limite $\ell \in \mathbf{R}$ en $x_0 \in \mathbf{R}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$*$ f a pour limite $\pm\infty$ en $x_0 \in \mathbf{R}$ si et seulement si :

$$\forall M \in \mathbf{R},\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ \begin{cases} f(x) \geqslant M & \big(\lim\limits_{x_0} f = +\infty\big) \\ f(x) \leqslant M & \big(\lim\limits_{x_0} f = -\infty\big) \end{cases}$$

$*$ f a pour limite $\ell \in \mathbf{R}$ en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]\alpha, +\infty[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$*$ f a pour limite $\pm\infty$ en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall M \in \mathbf{R},\ \exists\, \alpha \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]\alpha, +\infty[,\ \begin{cases} f(x) \geqslant M & \big(\lim\limits_{+\infty} f = +\infty\big) \\ f(x) \leqslant M & \big(\lim\limits_{+\infty} f = -\infty\big) \end{cases}$$

Méthode : pour déterminer une limite, on utilise les règles opératoires sur les limites.
Il faut savoir identifier les éventuelles **formes indéterminées**, du type :

$$\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \frac{\ell}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^{\infty},\ \infty^0 \text{ et } 0^0$$

Pour ces trois dernières formes indéterminées, on utilise toujours la forme exponentielle.
Pour lever une indétermination, on utilise : un résultat de croissances comparées, une règle sur les fonctions polynomiales ou rationnelles, un équivalent, un DL.

$*$ **Règles des fonctions polynomiales ou rationnelles** :
Les limites en $\pm\infty$ sont celles du monôme dominant ou du quotient des monômes dominants.

$*$ **Croissances comparées** :

$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$

$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

$\forall n \in \mathbf{N}^\star, \forall \beta > 0, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^{\beta x} = 0$

$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$

2 Propriétés

Dans les propriétés suivantes, x_0 désigne un réel ou $\pm\infty$, et $\ell, \ell' \in \mathbf{R}$.

Propriété **Passage à la limite dans une inégalité**

- Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ et si $f \geqslant 0$ ou $f > 0$ sur un voisinage de x_0, alors $\ell \geqslant 0$.
- Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell'$, et si $f \leqslant g$ ou $f < g$ sur un voisinage de x_0, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Théorème d'encadrement (des gendarmes)

Si $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell$ et si $f \leqslant g \leqslant h$ sur un voisinage de x_0, alors $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

Théorème de comparaison

- Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ et $f \leqslant g$, alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$ et $f \leqslant g$, alors $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$.

Théorème de la limite monotone

Soit f une fonction **monotone** sur un intervalle de bornes a et b.
Alors f admet en a et en b des limites finies ou infinies.

IV Négligeabilité, équivalence

1 Définitions

DÉFINITION

$*$ f est **négligeable** devant g en $x_0 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si : $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On note alors : $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g)$.

$*$ f et g sont **équivalentes** en $x_0 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si : $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note alors : $f \underset{x_0}{\sim} g$.

2 Opérations sur les équivalents

PROPRIÉTÉ

- Deux quantités équivalentes ont même comportement asymptotique :
  si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.
- On peut multiplier des équivalents :
  si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$, alors $fh \underset{x_0}{\sim} gk$.
- On peut diviser des équivalents :
  si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$, h ne s'annulant pas, alors $\dfrac{f}{h} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g}{k}$.
- On peut élever à une puissance **fixée** un équivalent :
  Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ avec $f > 0$ ou $g > 0$ sur un voisinage de x_0, alors $f^\alpha \underset{x_0}{\sim} g^\alpha$.
- On peut composer **à droite** un équivalent :
  si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x_1} \varphi = x_0$, alors $f \circ \varphi \underset{x_1}{\sim} g \circ \varphi$.
- Règle de la souris et de l'éléphant : si $g \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(f)$, alors $f + g \underset{x_0}{\sim} f$

3 Équivalents usuels

$\sin(t) \underset{0}{\sim} t$ $\qquad$ $\tan(t) \underset{0}{\sim} t$ $\qquad$ $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$

$\cos(t) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}t^2$ $\qquad$ $\exp(t) - 1 \underset{0}{\sim} t$ $\qquad$ $(1+t)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha t$

Une fonction polynomiale ou rationnelle équivaut <u>en $\pm\infty$</u> à son monôme de plus haut degré (ou au quotient de ses monômes de plus hauts degrés), et <u>en 0</u> à son monôme de plus bas degré (ou au quotient de ses monômes de plus bas degrés).

V Continuité

1 Définitions

DÉFINITION

$*$ f est **continue** en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$*$ f se prolonge par continuité en $x_0 \notin \mathcal{D}_f$ si f possède une limite ℓ **finie** en x_0.

On pose alors : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$

2 Théorèmes des fonctions continues

THÉORÈME DES BORNES ATTEINTES

Soit f une fonction **continue** sur un **segment** $[a, b]$.
Alors f est **bornée** et atteint ses bornes :

$$\exists\, c, d \in [a, b] \mid \forall x \in [a, b],\ f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d).$$

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES (TVI)

L'image d'un **intervalle** par une fonction **continue** est un intervalle.

$$\forall a, b \in I,\ \forall y \in \mathbf{R},\ f(a) \leqslant y \leqslant f(b) \Rightarrow \exists\, c \in I \mid y = f(c).$$

Théorème de la bijection continue

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** définie sur un **intervalle** I.
Alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$.
Sa bijection réciproque f^{-1} est continue de $f(I)$ vers I, strictement monotone et de même monotonie que f.
De plus, si I est un intervalle de bornes a et b, alors $f(I)$ est un intervalle de bornes $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, de même type que I (ouvert, fermé, semi-ouvert).

VI Dérivabilité

1 Définitions

Définition

f est **dérivable** en $a \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si $\Delta_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite **finie** quand h tend vers 0 ($h \neq 0$). On note alors cette limite $f'(a)$.
$f'(a)$ est le **nombre dérivé** de f en a. La fonction $a \longmapsto f'(a)$ est la **fonction dérivée** de f.

Soit $k \in \mathbf{N}$. Une fonction **de classe** $\mathcal{C}^k$ est une fonction k-fois dérivable, et dont la k-ème dérivée est continue. On note : $f \in \mathcal{C}^k(I)$.
$\mathcal{C}^0(\mathbf{R})$ désigne donc l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$,
$\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbf{R}$, et dont la dérivée f' est continue sur $\mathbf{R}$.
$\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbf{R}$.

2 Propriétés

Propriété

$*$ f est dérivable en $a \in \mathcal{D}_f$ si et seulement la courbe représentative de f admet en son point d'abscisse a une **tangente non verticale** $\mathcal{T}$.
Dans ce cas, $f'(a)$ est le coefficient-directeur de $\mathcal{T}$, d'équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$*$ Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. La réciproque est fausse.

$*$ Toutes les fonctions usuelles sont de classe C^∞ sur leurs ensembles de définition, **SAUF** :
- la fonction partie entière, discontinue sur $\mathbf{Z}$,
- la fonction valeur absolue, continue mais non dérivable en 0,
- les fonctions racines n-ème, continues mais non dérivables en 0.

$*$ Toutes les opérations usuelles sur des fonctions dérivables produisent des fonctions dérivables.
En particulier, si u et v sont dérivables (et quand ces opérations existent) :

$(u+v)' = u' + v'$
$(u \times v)' = u'v + uv'$
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
$\big(e^u\big)' = u' \times e^u$
$\big(\ln(u)\big)' = \dfrac{u'}{u}$
$\big(\cos u\big)' = -u' \sin(u)$

$\big(\sin u\big)' = u' \cos(u)$
$\big(\tan u\big)' = u' \times \big(1 + \tan^2(u)\big) = \dfrac{u'}{\cos^2(u)}$
$\big(\operatorname{Arctan} u\big)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$*$ **Dérivée d'une bijection réciproque** :
si f est dérivable et bijective, et si de plus $f'(a) \neq 0$, alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et on a : $\big(f^{-1}\big)'(b) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$

3 Théorèmes des fonctions dérivables

Théorème de Rolle

Soit f **continue** sur un segment $[a,b]$ et **dérivable** sur l'ouvert $]a,b[$.
Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis (TAF)

Soit f **continue** sur un segment $[a,b]$ et **dérivable** sur l'ouvert $]a,b[$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Théorème $*$ Inégalité des accroissements finis (IAF) $*$

Soit f **continue** sur un segment $[a,b]$ et **dérivable** sur l'ouvert $]a,b[$.
On suppose qu'il existe un réel M tel que : $\forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \leqslant M$.
Alors : $|f(b) - f(a)| \leqslant M.|b-a|$

VII Développements limités (DL)

1 Définition

DÉFINITION

Soit $n \in \mathbf{N}$. Une fonction f admet un développement limité d'ordre n (DL_n) en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P(x - x_0) + \mathrm{o}\big((x - x_0)^n\big)$$

PROPOSITION

- f admet un DL_0 en x_0 si et seulement si f est continue en x_0.
$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + \mathrm{o}(1)$$
- f admet un DL_1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0.
$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathrm{o}(x - x_0)$$
- Si f est n fois dérivable en $x_0 (n \geqslant 2)$, alors f admet un DL_n en x_0, mais la réciproque est fausse.

2 Formule de Taylor

THÉORÈME DE TAYLOR-YOUNG

Soit f une fonction n fois dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$.
Alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, donné par :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \; + \mathrm{o}\big((x - x_0)^n\big)$$

3 Formulaire des DL usuels en 0

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

$$\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

pour $\alpha = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=} x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \mathrm{o}(x^5)$$

VIII Plan d'étude d'une fonction

Si la consigne est : « Étudier la fonction f d'expression $f(x) = \dots$ », on doit :

1. Rechercher l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2. Étudier les régularités de f : périodicité, parité/imparité, symétrie du graphe.
Éventuellement, on peut alors réduire l'intervalle d'étude.
3. Étudier la monotonie de f. L'outil principal est ici l'étude du signe de sa dérivée :
    * expliquer pourquoi f est dérivable,
    * déterminer l'expression de $f'(x)$,
    * étudier le signe de $f'(x)$ et conclure.
4. Repérer les valeurs particulières de f, comme ses éventuels extrema (maximum, minimum).
5. Étudier les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
6. Résumer tous les résultats dans un tableau de variations complet.
7. Tracer l'allure de la courbe représentative de f, en indiquant les éventuelles asymptotes et tangentes connues.

IX Rappels de syntaxe *Python*

1 Définir une fonction

```
import numpy as np      # importation d'un module (on peut aussi importer le module math)
np.exp, np.log, np.cos, np.sin, np.tan, np.arctan      # fonctions usuelles prédéfinies
def f(x) :              # syntaxe pour définir une fonction personnalisée
   return ...
```

2 Représenter graphiquement une fonction

```
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(a,b,N)      # représentation sur [a,b] avec N points calculés
Y = f(X)     ou     Y = [f(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

3 Script de dichotomie

On cherche une valeur approchée d'une solution sur $[a, b]$ à l'équation $f(x) = 0$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$, et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés.

```
def dichotomie(f,a,b,epsilon) :
   while b-a > epsilon :
      c = (a+b)/2
      if f(a)*f(c) < 0 :
         b = c
      else :
         a = c
   return a
```

X Exercices

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\left|x - \frac{1}{5}\right| = \frac{5}{6}$ *b)* $|x - 3| \leqslant \frac{3}{2}$ *c)* $\left|x + \frac{3}{4}\right| > \frac{4}{3}$

Exercice 2 Exprimer les relations suivantes à l'aide d'inégalités portant sur des valeurs absolues :

a) $x \in \left]-\frac{16}{5}, \frac{14}{5}\right[$ *b)* $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ *c)* $x \in [0, 4]$

Exercice 3 On pose : $\mathrm{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Montrer que th réalise une bijection de $\mathbf{R}$ vers un intervalle à préciser.

b) Pour $x \in]-1, 1[$, on pose : $\mathrm{Argth}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Déterminer $\mathrm{Argth} \circ \mathrm{th}$ puis $\mathrm{th} \circ \mathrm{Argth}$. Conclure.

Exercice 4 Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes au point indiqué :

a) $f(x) = 2x^2 - x - 1$ en 0, en 1 et en $+\infty$ *b)* $g(x) = \sin(1 - \cos x)$ en 0.

Exercice 5 Étudier les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4} - 2}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos(2x)}$

Exercice 6 Étudier le domaine de définition et les limites aux bornes des fonctions définies par :

a) $f(x) = x^a\, e^{\frac{1}{x}} \quad (a \in \mathbf{R})$ *b)* $g(x) = (1 - \ln x)^x$

Exercice 7 Étudier la dérivabilité de la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$.

Exercice 8 Soit $f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - x\right)\right)$.

Calculer la dérivée de f. En déduire une expression simple de $f(x)$.

Exercice 9 Soit $f(x) = \ln(1 + x)$. Calculer la dérivée n-ème de f.

Exercice 10 Déterminer les développements limités suivants :

a) $f(x) = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \sin x}$ à l'ordre 3 en 0 *b)* $g(x) = \ln(1 + \sqrt{x})$ à l'ordre 2 en 1

c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$ à l'ordre 2 en $+\infty$