I Vocabulaire des suites réelles

DÉFINITION

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une application u de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.
Le terme d'indice n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, noté u_n, correspond à : $u_n = u(n)$.

Remarque : On peut définir une suite sur une partie finissante de $\mathbf{N}$, comme $\mathbf{N}^\star$ ou $\mathbf{N}\setminus\{0,1,2\}$.
On note alors : $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

DÉFINITION

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite :

- **positive** (*resp : strictement positive*) si : $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n\geqslant 0 \quad$ (*resp* : $u_n>0$)
- **négative** (*resp : strictement négative*) si : $\forall n\in\mathbf{N},\ u_n\leqslant 0 \quad$ (*resp* : $u_n<0$)
- **périodique** de période $T\in\mathbf{N}^\star$ si : $\forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+T}=u_n$
- **majorée** si : $\exists M\in\mathbf{R},\ \forall n\in\mathbf{N},\ u_n\leqslant M$
- **minorée** si : $\exists m\in\mathbf{R},\ \forall n\in\mathbf{N},\ u_n\geqslant m$
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée
- **croissante** (*resp : strictement croissante*) si : $\forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+1}\geqslant u_n \quad$ (*resp* : $u_{n+1}>u_n$)
- **décroissante** (*resp : strictement décroissante*) si : $\forall n\in\mathbf{N},\ u_{n+1}\leqslant u_n \quad$ (*resp* : $u_{n+1}<u_n$)
- **monotone** (*resp : strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (*resp : strictement croissante ou strictement décroissante*)

Remarque : ces définitions peuvent s'énoncer *à partir d'un certain rang.*

Méthode : Une suite est bornée si et seulement si : $\exists M\in\mathbf{R},\ \forall\in\mathbf{N},\ |u_n|\leqslant M$.

Méthode : Pour étudier la monotonie d'une suite (u), on étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$.

Si (u) est strictement positive, on peut étudier la position du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

Si u_n est défini par une expression $u_n=f(n)$, on peut étudier la monotonie de la fonction f.

Exercice 1 : Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$ est décroissante à partir du rang 1.

DÉFINITION

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On appelle :

- **suite extraite de rangs pairs** la suite (v) définie par : $\forall n\in\mathbf{N},\ v_n=u_{2n}$
- **suite extraite de rangs impairs** la suite (w) définie par : $\forall n\in\mathbf{N},\ w_n=u_{2n+1}$

II Limite d'une suite réelle

1 Définitions

DÉFINITION

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et ℓ un réel.
- On dit que $(u_n)_n$ **converge** ou **tend** vers ℓ si et seulement si :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n\geqslant N,\ |u_n-\ell|<\varepsilon$$

- On dit que $(u_n)_n$ **diverge** ou **tend** vers $+\infty$ (*resp* : $-\infty$) si et seulement si :

$$\forall A\in\mathbf{R},\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall n\geqslant N,\ u_n\geqslant A \quad (\textit{resp} : u_n\leqslant A)$$

Notation des limites : $\lim u_n=\ell$, ou $u_n\longrightarrow\ell$, ou $\lim u_n=\pm\infty$, ou $u_n\longrightarrow\pm\infty$

Méthode : (u_n) converge vers $\ell \iff \lim(u_n-\ell)=0 \iff \lim|u_n-\ell|=0$

DÉFINITION *Nature d'une suite*

Toute suite réelle : ou bien converge vers un réel ℓ,
ou bien diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$,
ou bien est **divergente de seconde espèce**.

Exemple : la suite (u) définie par $u_n=(-1)^n$ est divergente de seconde espèce.
Remarque : on ne change pas la nature d'une suite en en modifiant un nombre *fini* de termes.

2 Propriétés générales

PROPOSITION ∗∗ Unicité de la limite ∗∗

Si une suite converge, alors sa limite est unique.

THÉORÈME DES SUITES EXTRAITES

Une suite (u_n) est convergente si et seulement si ses suites extraites de rangs pairs et impairs convergent vers la même limite.

PROPOSITION

Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

3 Opérations sur les limites

(u_n) et (v_n) sont deux suites possédant une limite.

∗ **Somme**

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

∗ **Produit**

$\lim u_n$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	0	$\ell>0$	$\ell<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n\times v_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

∗ **Inverse**

$\lim u_n$	$\ell\neq 0$	0	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	FI	$+\infty$	$-\infty$	0	0

4 Propriétés liées à la relation d'ordre

4.1 Signe d'une suite de limite non nulle :

Si $\lim u_n = \ell \in \mathbf{R}^\star$, alors (u_n) est positive (si $\ell > 0$) ou négative (si $\ell < 0$) à partir d'un certain rang.

4.2 Passage à la limite dans une inégalité :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que : $\exists\, n_0 \in \mathbf{N},\ \forall\, n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$ ou $u_n < v_n$
Alors, on a : $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

4.3 Théorème des gendarmes : Soient $(u_n),(v_n)$ et (w_n) trois suites réelles telles que :

- les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbf{R}$
- $\exists\, n_0 \in \mathbf{N},\quad \forall\, n \geqslant n_0,\quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

Alors, la suite (v_n) converge, et sa limite est ℓ.

Exercice 2 : Étudier la nature de la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$.

4.4 Produit d'une suite bornée par une suite convergente vers 0 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0.
Alors, la suite $(u_n \times v_n)$ converge vers 0.

Exercice 3 : Étudier la nature de la suite définie, pour $n \geqslant 0$, par $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin(n)}{n^2 - 3n + 3}$.

4.5 Théorème de comparaison : Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $\exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$.

- Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, alors la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.
- Si la suite (v_n) diverge vers $-\infty$, alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

4.6 Théorème de convergence monotone :

- Toute suite réelle (u_n) croissante et majorée converge et $\lim u_n = \sup\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.
- Toute suite réelle (u_n) croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite réelle (u_n) décroissante et minorée converge et $\lim u_n = \inf\{u_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.
- Toute suite réelle (u_n) décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Exercice 4 : Étudier la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

5 Suites adjacentes

DÉFINITION

Deux suites sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre est décroissante, et leur différence converge vers 0.

THÉORÈME DES SUITES ADJACENTES

Deux suites adjacentes sont convergentes, et leurs limites sont égales.
De plus, on a (en appelant (u_n) la suite croissante) : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_0 \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant v_n \leqslant v_0$

Exercice 5 : Étudier la nature des suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

6 Comparaison des suites

DÉFINITION

(u_n) est **négligeable** devant (v_n) si et seulement si : $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$. On note alors : $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.
La suite (u_n) est **équivalente** à la suite (v_n) si et seulement si : $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors : $u_n \sim v_n$.

Méthodes : $\lim u_n = \ell \in \mathbf{R}^\star$ si et seulement si : $u_n \sim \ell$.
$\lim u_n = 0$ si et seulement si : $u_n = \mathrm{o}(1)$.
$u_n \sim 0$ si et seulement si (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

PROPOSITION

Deux suites équivalentes sont **de même nature** : si $u_n \sim v_n$, alors :
* si $\lim u_n = \ell \in \mathbf{R}$ alors $\lim v_n = \ell$
* si $\lim u_n = \pm\infty$ alors $\lim v_n = \pm\infty$
* si (u_n) diverge de seconde espèce, alors (v_n) aussi.

PROPRIÉTÉ

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ et (d_n) quatre suites réelles, soit α un réel. Alors :

- si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $a_n + b_n \sim b_n$
- $a_n \sim b_n$ si et seulement si $b_n \sim a_n$
- si $a_n \sim b_n$, alors $\alpha a_n \sim \alpha b_n$
- si $a_n \sim b_n$ et $b_n \sim c_n$, alors $a_n \sim c_n$
- si $a_n \sim b_n$, alors $|a_n| \sim |b_n|$
- si $a_n \sim b_n$, alors $(a_n)^\alpha \sim (b_n)^\alpha$
- si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$, alors $a_n\, c_n \sim b_n\, d_n$
- si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$, alors $\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$

Croissances comparées : On note ici $<<$ le fait d'être « négligeable devant ».
Soient $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$ trois réels. Alors on a : $(\ln n)^\alpha << n^\beta << a^n << n! << n^n$

Équivalents usuels en 0 : Soit (u_n) une suite réelle convergente vers 0. Alors on a :

- $\sin u_n \sim u_n$
- $\tan u_n \sim u_n$
- $\cos u_n - 1 \sim -\frac{(u_n)^2}{2}$
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n \quad (\forall \alpha \in \mathbf{R})$

Autre équivalent usuel : Une suite polynomiale est équivalente à son monôme dominant.
Si $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ avec $a_p \neq 0$, alors $P(n) \sim a_p n^p$

III Suites complexes

DÉFINITION

Une suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{C}$.
Si $z_n = a_n + i b_n$ sous forme algébrique, alors (a_n) et (b_n) sont deux suites réelles.
On note : $(a_n) = (\mathrm{Re}(z_n))$ et $(b_n) = (\mathrm{Im}(z_n))$.
La suite (z_n) **converge** vers $z = a + ib \in \mathbf{C}$ si et seulement si (a_n) converge vers $a \in \mathbf{R}$ et (b_n) converge vers $b \in \mathbf{R}$.

Attention ! L'ensemble $\mathbf{C}$ n'est pas ordonné, donc aucun résultat lié à la relation d'ordre ne se généralise dans $\mathbf{C}$. En particulier, dire qu'une suite complexe diverge vers $\pm\infty$ n'a aucun sens.

IV Suites récurrentes usuelles

Dans ce paragraphe, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Suites arithmétiques

DÉFINITION

Soit $r \in \mathbf{K}$. On appelle **suite arithmétique de raison** r toute suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + r$

Terme général d'une suite arithmétique : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0 + nr$

$\forall n, p \in \mathbf{N},\ u_n = u_p + (n-p)r$

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Pour $p \leqslant n$, on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}$ = (nombre de termes) $\times$ (moyenne des extrêmes)

Nature d'une suite arithmétique réelle : soit (u_n) arithmétique réelle de raison r.

$*$ si $r > 0$, alors $\lim u_n = +\infty$
$*$ si $r < 0$, alors $\lim u_n = -\infty$
$*$ si $r = 0$, alors (u_n) est constante, et converge vers u_0

2 Suites géométriques

DÉFINITION

Soit $q \in \mathbf{K}$. On appelle **suite géométrique de raison** q toute suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$

Terme général d'une suite géométrique : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = u_0 \times q^n$

$\forall n, p \in \mathbf{N},\ u_n = u_p \times q^{n-p}$ (si $q \neq 0$ ou $n \geqslant p$)

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

Pour $p \leqslant n$, on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = \begin{cases} u_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n-p+1)u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Retenir si $q \neq 1$: $S = \text{(premier terme)} \times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

Nature d'une suite géométrique réelle : soit (u_n) géométrique réelle de raison q.

Si $u_0 = 0$, alors (u_n) est la suite nulle. Sinon :

$\left.\begin{array}{l} * \text{ si } |q| < 1, \text{alors } \lim u_n = 0 \\ * \text{ si } |q| > 1, \text{alors } \lim |u_n| = +\infty \end{array}\right\}$ encore valable dans $\mathbf{C}$
$*$ si $q = 1$, alors (u_n) est constante, et converge vers u_0
$*$ si $q \leqslant -1$, alors (u_n) diverge de seconde espèce
$*$ si $q > 1$, alors $\lim u_n = \pm\infty$ selon le signe de u_0

3 Suites arithmético-géométriques

DÉFINITION

Soient $a, b \in \mathbf{K}$. On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = a \times u_n + b$

Suite auxiliaire : Si $a \neq 1$, soit ℓ l'unique point-fixe de la relation de récurrence : $\ell = a\ell + b$.

Alors la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = u_n - \ell$, est géométrique de raison a.

Terme général d'une suite arithmético-géométrique : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = v_n + \ell = (u_0 - \ell)a^n + \ell$

En particulier, si $|a| < 1$, alors $\lim u_n = \ell$.

Exercice 6 : Étudier la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 0,9\, u_n + 1,2 \end{cases}$

4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

DÉFINITION

Une suite (u_n) vérifie une **relation de récurrence linéaire d'ordre 2** lorsqu'il existe $a, b \in \mathbf{K}$, avec $b \neq 0$, tels que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Équation caractéristique : si $a, b \in \mathbf{R}$, on pose $(E) : r^2 = ar + b \Leftrightarrow r^2 - ar - b = 0$
de discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.

- si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions réelles r_1 et r_2.
- si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution-double réelle r_0.
- si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées $z = re^{i\theta}$ et $\overline{z} = re^{-i\theta}$.

Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients réels :

- si $\Delta > 0,\ \exists A, B \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = A \times (r_1)^n + B \times (r_2)^n$.
- si $\Delta = 0,\ \exists A, B \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (An + B) \times (r_0)^n$
- si $\Delta < 0,\ \exists A, B \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = r^n \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right)$

Méthode : on détermine A, B en résolvant le système donné par les 2 premiers termes de la suite.

Exercice 7 : Étudier la suite définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

V Suites définies par une récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbf{R}$, et soit $(u_n)_n \in \mathbf{N}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \quad \text{est donné} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Méthode d'étude de (u_n) :

- On étudie la fonction f (ensemble de définition, variations, limites).
- On étudie le signe de $g(x) = f(x) - x$.
- On trace l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$, ainsi que la droite $\Delta : y = x$.
  Le signe de $g(x)$ donne les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et Δ.
- On trace sur le graphique les premiers termes de la suite (u_n), en se servant de $\mathcal{C}_f$ et de Δ.
  On peut alors effectuer une conjecture sur les variations ou la nature de (u_n).
- On identifie un intervalle réel I tel que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n$ existe et $u_n \in I$.
  On fait un raisonnement par récurrence.

(a) Si f est croissante sur I, on montre par récurrence que (u_n) est monotone.
La monotonie est alors donnée par l'ordre des 2 premiers termes de la suite.
On utilise le théorème de convergence monotone.
Si (u_n) converge, sa limite ℓ est un *point fixe* de f : elle vérifie $f(\ell) = \ell$ *ie :* $g(\ell) = 0$.

(b) Si f est décroissante sur I, on montre par récurrence que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

(c) Si f est *strictement contractante* ($\exists K \in [0, 1[,\ \forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant K$) :
∗ on cherche l'unique point-fixe de f (l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$)
∗ on montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_n - \ell| \leqslant K^n |u_0 - \ell|$ en utilisant **l'IAF**.
∗ on conclut que $\lim u_n = \ell$ grâce au théorème des gendarmes.

Exercice 8 : Étudier la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

Exercice 9 : Étudier la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 5 - \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$

VI Suites implicites

1 Suites définies par une relation du type $f(u_n) = n$

Soit f une fonction réelle et soit (u_n) une suite définie *implicitement* de la façon suivante :

Pour tout entier naturel n, u_n est l'unique solution de l'équation $f(x) = n$.

Méthode :

- Étude complète de la fonction f.
- Utilisation du **théorème de la bijection** pour montrer que $f : I \to J$ réalise une bijection. L'intervalle J doit contenir tous les entiers naturels, prouvant la bonne définition de la suite (u_n).
- La monotonie (stricte) de f sur I se transmet à la suite (u_n).
- Les limites de f permettent d'expliciter la nature de (u_n).

Exercice 10 : On pose $f(x) = x + \ln(x)$ pour tout $x > 0$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, notée u_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante.
3. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ \frac{n}{2} \leqslant u_n \leqslant n$ et en déduire la limite de la suite (u_n).
4. Montrer que : $u_n \sim n$.

2 Suites définies par une relation du type $f_n(u_n) = 0$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une *famille de fonctions* et soit (u_n) une suite définie *implicitement* de la façon suivante :

Pour tout entier naturel n, u_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

Méthode :

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, étude complète de la fonction f_n.
- Utilisation du **théorème de la bijection** pour montrer que $f_n : I_n \to J_n$ réalise une bijection, avec $0 \in J_n$. Ceci prouve l'existence de u_n.
- Étude du signe de $f_n(u_{n+1})$ ou de $f_{n+1}(u_n)$ (celui qui est le plus simple).
- Conclusion sur la monotonie de (u_n) en utilisant le fait que $f_n(u_n) = 0$ ou $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ et que f_n ou f_{n+1} est monotone.
- Utilisation de la relation $f_n(u_n) = 0$ pour obtenir une limite ou un équivalent.

Exercice 11 : On pose pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbf{N}^\star$: $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$.

1. Étudier les variations de f_n pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$.
2. Montrer que l'équation $(E_n) : e^x = x^n$ admet pour tout $n \geqslant 3$ une unique solution u_n dans $[0, n]$ et une unique solution v_n dans $]n, +\infty[$.
3. Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 1$.
4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ et en déduire qu'elle converge vers un réel ℓ.
5. Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ u_n = n \times \ln(u_n)$. En déduire que $\ell = 1$.
6. On pose $a_n = u_n - 1$ pour tout $n \geqslant 3$. Déterminer un équivalent de a_n.
7. Déterminer la limite de $(v_n)_{n \geqslant 3}$.
8. Montrer que : $\forall n \geqslant 3,\ \ln(v_n) - \ln\big(\ln v_n\big) = \ln(n)$. En déduire un équivalent de v_n.