

Programme de colles
Semaine 3 du 29/09 au 3/10/2025

Révisions d'analyse

- Applications, injections, surjections, bijections
- Composées, bijection réciproque d'une application bijective
- Fonctions usuelles :
 - * fonction valeur absolue
 - * fonctions exponentielles $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto a^x$ avec $a > 0$
 - * fonctions logarithme népérien et logarithme décimal
 - * fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$: α entier, $\alpha = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbf{Z}^*$ ou α quelconque
 - * fonctions polynomiales
- Notions de limites : finie ou infinie en $a \in \mathbf{R}$ ou en $\pm\infty$
- Limites et relation d'ordre :
 - * passage à la limite dans une inégalité
 - * théorème d'encadrement (des gendarmes)
 - * théorèmes de comparaison
 - * théorème de la limite monotone
- Négligeabilité, équivalence :
 - * définitions
 - * opérations sur les équivalents
 - * équivalents usuels en 0
- Notion de continuité :
 - * définition, prolongement continu
 - * théorème des bornes atteintes
 - * théorème des valeurs intermédiaires
 - * théorème de la bijection continue
- Notion de dérivabilité :
 - * définition, fonction de classe \mathcal{C}^k
 - * lien avec les tangentes, équations des tangentes
 - * opérations usuelles sur les dérivées
 - * théorème de Rolle
 - * théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis
- Développements limités
 - * définition
 - * formule de Taylor-Young
 - * développements limités usuels en 0 :

$$x \mapsto \frac{1}{1-x} \quad x \mapsto \ln(1+x) \quad x \mapsto e^x \quad x \mapsto (1+x)^\alpha \quad \alpha \in \mathbf{R} \text{ fixé}$$

$$x \mapsto \sin(x) \quad x \mapsto \cos(x) \quad x \mapsto \text{Arctan}(x)$$

Intégration d'une fonction continue sur un segment

- Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.
- Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
- Intégration d'une fonction continue sur un segment :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive quelconque de } f \text{ sur } [a, b]$$
- Interprétation géométrique en terme d'aires
- Théorème fondamental de l'analyse : $x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a
- Propriétés de l'intégrale : inversion des bornes, linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance

- Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment, théorème de la moyenne
- Intégration "à vue" : par lecture inverse des tables de dérivées
- Intégration par parties
- Changement de variables de classe \mathcal{C}^1 (sauf dans les cas simples, il est donné)
- Sommes de Riemann sur $[0, 1]$: $\int_0^1 f = \lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

Questions de cours :

1. Présentation d'une fonction usuelle au choix de l'examinateur
2. Citer le théorème d'encadrement (des gendarmes)
3. Citer le théorème de la limite monotone
4. Définir : $f \underset{x_0}{\sim} g$ et donner des équivalents usuels choisis par l'examinateur
5. Citer le théorème des bornes atteintes
6. Citer le théorème de la bijection continue
7. Définir : " f est dérivable en x_0 "
8. Citer le théorème des accroissements finis
9. Donner des développements limités usuels choisis par l'examinateur
10. Primitives de $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
11. Primitives de $u'u^\alpha$, $u'e^u$, $u'\sin(u)$, $u'\cos(u)$, $\frac{u'}{1+u^2}$ où u est une fonction dérivable
12. Théorème d'intégration par parties
13. Théorème de changement de variables
14. Méthode d'intégration de $x \mapsto (\sin x)^p(\cos x)^q$, où $p, q \in \mathbf{N}$