

I Généralités

On s'intéresse dans ce chapitre à des modélisations mathématiques de l'évolution d'une population. Deux types de modèles sont utilisés : des modèles *discrets* et des modèles *continus*.

Dans un modèle discret, la population étudiée est représentée par une suite $(N_t)_{t \in \mathbf{N}}$ où N_t est la population à l'instant t . Ce temps t prend des valeurs "discrètes" : un nombre entier d'heures, jours, années... Le modèle consiste en une **relation de récurrence** entre deux termes consécutifs de la suite $(N_t)_t$.

Dans un modèle continu, la population étudiée est représentée par une fonction $t \mapsto N(t)$ où $N(t)$ est la population à l'instant t . Ce temps t prend des valeurs "continues" : un nombre réel positif. Le modèle consiste en une **équation différentielle** vérifiée par la fonction N .

Le **taux de croissance** (vitesse de croissance) est :
$$\begin{cases} N_{t+1} - N_t & \text{pour un modèle discret} \\ N'(t) & \text{pour un modèle continu} \end{cases}$$

Le **taux de croissance per capita** (par individu) est :
$$\begin{cases} \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} & \text{pour un modèle discret} \\ \frac{N'(t)}{N(t)} & \text{pour un modèle continu} \end{cases}$$

II Modèles discrets

1 Modèle de Malthus

Dans le modèle de Malthus, on fait l'hypothèse que le taux de croissance est proportionnel au nombre d'individus : $\boxed{\forall t \in \mathbf{N}, N_{t+1} - N_t = rN_t}$ ce qui revient à dire que le taux de croissance per capita est constant (égal à r). Ainsi $\boxed{\forall t \in \mathbf{N}, N_{t+1} = (1+r)N_t}$. La suite $(N_t)_t$ est **géométrique de raison** $1+r$.

Résolution : $\forall t \in \mathbf{N}, N_t = N_0(1+r)^t$.

* si $r > 0$, alors $\lim N_t = +\infty$: la population croît géométriquement et diverge vers $+\infty$.

* si $r = 0$, alors la population est constante.

* si $r < 0$, alors $\lim N_t = 0$: la population décroît géométriquement jusqu'à extinction.

2 Modèle logistique (de Verhulst)

Dans le modèle logistique, le taux de croissance per capita est une fonction affine décroissante du nombre d'individus : $\boxed{\forall t \in \mathbf{N}, \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} = r \left(1 - \frac{N_t}{K}\right)}$ où r, K sont des constantes fixées du modèle.

On obtient alors la relation de récurrence : $\boxed{\forall t \in \mathbf{N}, N_{t+1} = N_t \left[1 + r \left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right]}$

Résolution : il est difficile de résoudre cette relation de récurrence. On pourra mettre en oeuvre des procédés informatiques.

III Modèles continus

1 Modèle de Malthus

Même hypothèse que pour le modèle discret : $\boxed{\forall t \in \mathbf{R}_+, N'(t) = rN(t)}$.

Résolution : $\boxed{\forall t \in \mathbf{R}_+, N(t) = N_0 e^{rt}}$.

* si $r > 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty$: la population croît exponentiellement et diverge vers $+\infty$.

* si $r = 0$, alors la population est constante.

* si $r < 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$: la population décroît exponentiellement jusqu'à extinction.

2 Modèle logistique (de Verhulst)

Même hypothèse que pour le modèle discret : $\boxed{\forall t \in \mathbf{R}_+, \frac{N'(t)}{N(t)} = r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)}$.

Remarque : la constante K est appelée **capacité de charge du milieu**. Elle représente une population théorique maximale (dépendante des contraintes du milieu).

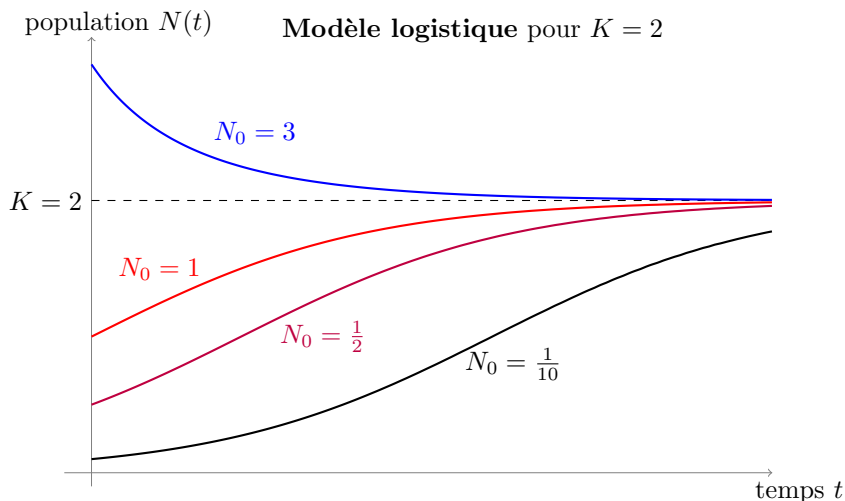
Résolution : $\boxed{(E) : N'(t) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t)}$ est une équation différentielle **non linéaire**.

Soit N une solution sur $\mathbf{R}_+$ de (E) . On suppose que N ne s'annule pas, et on pose : $\forall t \in \mathbf{R}_+, u(t) = \frac{1}{N(t)}$.

Alors u est dérivable par opérations et : $\forall t \geq 0, u'(t) = -\frac{N'(t)}{N(t)^2} = -\frac{r}{N(t)} + \frac{r}{K}$

donc $\boxed{\forall t \geq 0, u'(t) + ru(t) = \frac{r}{K}}$. On résout facilement cette EDL₁ : $\forall t \geq 0, u(t) = \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}$ et on trouve la constante λ en connaissant la population initiale $u(0) = \frac{1}{N_0} : \lambda = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K} = \frac{K - N_0}{KN_0}$.

Finalement : $\forall t \geq 0, N(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{K}{K\lambda e^{-rt} + 1}$ soit $\boxed{\forall t \geq 0, N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt}}}$



3 Modèle de Gompertz

Dans ce modèle, on fait l'hypothèse que le taux de croissance per capita est : $\boxed{\forall t \geq 0, \frac{N'(t)}{N(t)} = r \ln \left(\frac{K}{N(t)} \right)}$.

K, r sont des constantes fixées, K désigne encore la **capacité de charge du milieu**.

Résolution : $\boxed{(E') : N'(t) = r \ln \left(\frac{K}{N(t)} \right) N(t)}$ est une équation différentielle **non linéaire**.

Soit N une solution de (E') , strictement positive sur $\mathbf{R}_+$. On pose alors $u(t) = \ln(N(t))$.

u est dérivable par opérations et : $\forall t \geq 0, u'(t) = \frac{N'(t)}{N(t)} = r(\ln K - \ln(N(t))) = r \ln K - ru(t)$.

On résout facilement cette EDL₁ : $\forall t \geq 0, u(t) = \lambda e^{-rt} + \ln K$, donc $N(t) = e^{u(t)} = K \cdot \exp(\lambda e^{-rt})$.

On trouve λ grâce à la donnée de la population initiale $N_0 : \lambda = \ln \left(\frac{N_0}{K} \right)$

et finalement : $\boxed{\forall t \geq 0, N(t) = K \exp \left(\ln \left(\frac{N_0}{K} \right) e^{-rt} \right)}$.

