

Programme de colles
Semaine 4 du 6/10 au 10/10/2025

Intégration d'une fonction continue sur un segment

- Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.
- Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
- Intégration d'une fonction continue sur un segment :

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive quelconque de } f \text{ sur } [a, b]$$
- Interprétation géométrique en terme d'aires
- Théorème fondamental de l'analyse : $x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a
- Propriétés de l'intégrale : inversion des bornes, linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance
- Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment, théorème de la moyenne
- Intégration "à vue" : par lecture inverse des tables de dérivées
- Intégration par parties
- Changement de variables de classe \mathcal{C}^1 (sauf dans les cas simples, il est donné)
- Sommes de Riemann sur $[0, 1]$: $\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

Équations différentielles linéaires (EDL)

- EDL homogène associée
- Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL
- Principe de superposition
- EDL d'ordre 1 :
 - * Résolution de : $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ sur un intervalle où a est continue
 - * Méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$ où a, f sont continues
 - Unicité de la solution répondant à une condition initiale donnée : $y(t_0) = y_0$
- EDL d'ordre 2 :
 - * Résolution de : $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ où a, b sont des réels
 - * Résolution de : $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$ ($a, b \in \mathbf{R}$ et f continue) avec indications pour trouver une solution particulière
 - * Unicité de la solution répondant à une condition initiale donnée : $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$
- Autres équations différentielles : la méthode de résolution devra être entièrement guidée (changement de variables, fonction auxiliaire...)

Questions de cours :

1. Primitives de $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos x}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
2. Primitives de $u'u^\alpha$, $u'e^u$, $u'\sin(u)$, $u'\cos(u)$, $\frac{u'}{1+u^2}$ où u est une fonction dérivable
3. Théorème d'intégration par parties
4. Théorème de changement de variables
5. Méthode d'intégration de $x \mapsto (\sin x)^p(\cos x)^q$, où $p, q \in \mathbf{N}$
6. Résolution de : $y' + ay = 0$ avec a continue sur un intervalle
7. Résolution de : $y'' + ay' + by = 0$ avec $a, b \in \mathbf{R}$, dans le cas où $a^2 - 4b > 0$
8. Résolution de : $y'' + ay' + by = 0$ avec $a, b \in \mathbf{R}$, dans le cas où $a^2 - 4b = 0$
9. Résolution de : $y'' + ay' + by = 0$ avec $a, b \in \mathbf{R}$, dans le cas où $a^2 - 4b < 0$