DS n°1, mathématique

Durée : 2 heures
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 3 pages.

Thème 1 : Trigonométrie, nombres complexes

1. Rappeler la définition de la forme exponentielle d'un nombre complexe $z \neq 0$.

2. Citer les deux formules d'Euler.

3. Donner la forme algébrique des nombres suivants (valeurs exactes à l'aide de racines carrées) :
   (a) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ (b) $z_2 = e^{\overline{\frac{5i\pi}{6}}}$ (c) $z_3 = e^{i\pi}$ (d) $z_3 = e^{18i\pi}$

4. Mettre sous forme exponentielle les nombres suivants :
   (a) $z = 1$ (c) $z = -3/4$ (e) $z = -i$
   (b) $z = 5/7$ (d) $z = i$ (f) $z = -4i/3$

5. (a) Rappeler l'expression de la dérivée de la fonction cosinus.
   (b) Donner l'équation de la tangente à la courbe de la fonction cosinus au point d'abscisse $\pi/2$.
   (c) Tracer la courbe de la fonction cosinus sur l'intervalle $]-\pi,\pi]$.
   (allure à partir des tangentes, éléments remarquables *etc.*)
   (d) Préciser les ensembles :
      (i) A_0 des réels $\alpha \in]-\pi,\pi]$ tels que $\cos(\alpha) = 0$.
      (ii) A_+ des réels $\alpha \in]-\pi,\pi]$ tels que $\cos(\alpha) > 0$.
      (iii) A_- des réels $\alpha \in]-\pi,\pi]$ tels que $\cos(\alpha) < 0$.
   (e) Soient $\alpha \in]-\pi,\pi]$ et θ des réels. On pose $z = (\cos\alpha)e^{i\theta}$.
   Mettre z sous forme exponentielle.

6. Soient $u, v, u'v'$ des nombres complexes tels que $u + iv = u' + iv'$.
   (a) A-t-on $u = u'$ et $v = v'$? Justifier.
   (b) Simplifier : $\overline{u+v}$
   (c) Simplifier : $\overline{u+iv}$
   (d) Développer : $|u+v|^2$

7. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $z_n = (1+i\sqrt{3})^n - (1-i\sqrt{3})^n$. On pose : $w = 1+i\sqrt{3}$.
   (a) Exprimer z_n en fonction de $w, \overline{w}$, et n
   (b) Quelle hypothèse doit vérifier le nombre n pour pouvoir écrire :
   $$\forall \theta \in \mathbf{R}, \quad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \qquad ?$$
   (c) Mettre w sous forme exponentielle.
   (d) Compléter : $\forall z \in \mathbf{C}, \quad z - \overline{z} = \ldots$
   (e) Mettre z_n sous la forme $z_n = \lambda_n i \sin(\theta_n)$ pour des réels λ_n et θ_n à préciser.
   (f) Exprimer $|z_n|$ en fonction de n.

8. Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
   (b) Placer sur le cercle trigonométrique les points M_1, M_2 images respectives des nombres $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}}$.
   (c) En déduire une relation simple entre $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ d'une part, et entre $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ d'autre part.
   (d) Mettre j sous forme exponentielle.
   (e) Calculer j^2.
   (f) Donner l'argument de j^2 appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi]$.
   (g) En déduire une relation simple entre j^2 et $\overline{j}$.
   (h) Calculer j^3.
   (i) Calculer $S = 1 + j + j^2$.
   (j) Soit $n \in \mathbf{N}$. Simplifier l'expression de $(1+j)^{3n}$.

9. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On pose : $Z = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$.
   (a) Donner la forme algébrique de Z (*développer*).
   (b) Donner la forme exponentielle de Z.
   (c) En déduire l'expression de $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin\theta$.

10. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $\sqrt{3}\cos(t) - \sin(t) = 1$.

11. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation : $5z^2 - 4z + 1 = 0$.

Thème 2 : Analyse réelle

12. Donner un équivalent et étudier la limite de $f : x \longmapsto \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+2x-3}$ en x_0 lorsque :
   (a) $x_0 = 1$ (b) $x_0 = 2$ (c) $x_0 = +\infty$

13. Étudier les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(2t)}{\ln(1+t)}$ (b) $\lim\limits_{t\to 1} \frac{e^t - e}{\sqrt{t}-1}$

14. Soit f définie sur $\mathbf{R}^\star$ par : $f(x) = \frac{1-\cos x}{e^x - 1}$.
   f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

15. Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la dérivée de $f : x \longmapsto \cos(\sqrt{x})$.

16. On pose pour $x > 0$: $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ et $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x)$.
   (a) Étudier les variations et dresser le tableau de variations de g.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
   (c) En déduire le tableau de signes de g.
   (d) Dresser le tableau de variations complet de f.

17. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
   (a) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
   (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}$, et donner l'expression de sa dérivée f'.
   (c) Étudier les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
   (d) Montrer que f définit une bijection de $\mathcal{D}$ sur un intervalle J à déterminer.
   (e) Donner les propriétés de f^{-1} et montrer que f^{-1} est dérivable sur J.
   (f) Calculer $(f^{-1})'(1)$.

18. On définit la fonction f sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   On pose également : $g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$.
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^\star$, et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
   (b) Montrer que f est continue en 0.
   (c) Montrer que f est dérivable en 0, et donner la valeur de $f'(0)$.
   (d) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$? Justifier.
   (e) Étudier le signe de g sur $[0, \pi]$. En déduire les variations de f sur $[0, \pi]$.
   (f) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On définit sur l'intervalle $I_n = [n\pi, (n+1)\pi]$ l'équation :
   $$(E_n) : x\cos(x) = \sin(x)$$
   Montrer que (E_n) admet une unique solution α_n sur I_n.
   (g) En déduire le signe de g et les variations de f sur I_n.
   (h) Donner la limite en $+\infty$ de f, et en déduire que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote que l'on précisera.
   (i) Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ sur $[0, 6\pi]$.

$\star\star\star$ FIN DU SUJET $\star\star\star$