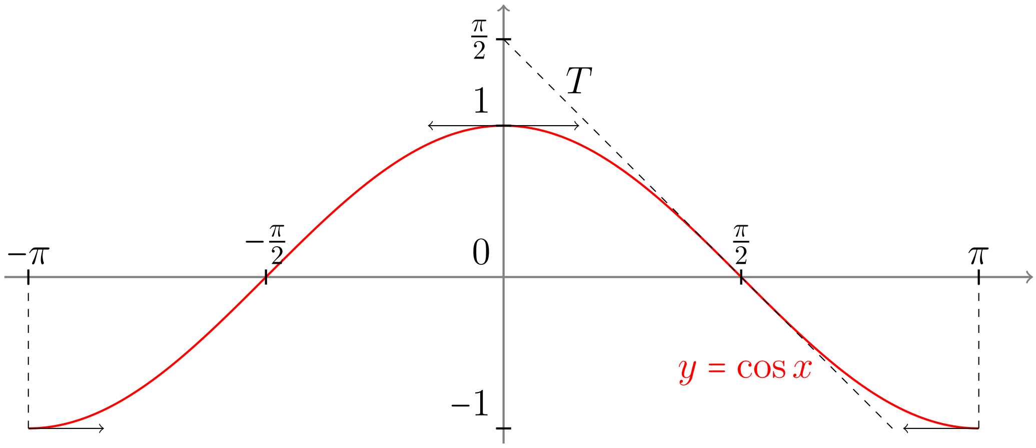
# Corrigé du DS n°1

## Thème 1 : Trigonométrie, nombres complexes

1. La forme exponentielle d'un complexe $z \neq 0$ est $\boxed{z = re^{i\theta}}$ où $r$ est le module de $z$ et $\theta$ en est un argument.
2. $\boxed{\forall \theta \in \mathbf{R},\ \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ et $\boxed{\forall \theta \in \mathbf{R},\ \sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$
3. Formes algébriques :
   (a) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\overline{e^{\frac{5i\pi}{6}}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$ (c) $e^{i\pi} = -1$ (d) $e^{18i\pi} = 1$
4. Forme exponentielle :
   (a) $1 = e^{0i}$
   (b) $5/7 = \dfrac{5}{7}e^{0i}$
   (c) $-3/4 = \dfrac{3}{4}e^{i\pi}$
   (d) $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
   (e) $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
   (f) $-4i/3 = \dfrac{4}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$
5. (a) $\boxed{\cos' = -\sin}$
   (b) $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\cos'(\frac{\pi}{2}) = -1$ donc $\boxed{T : y = -x + \dfrac{\pi}{2}.}$
   (c) Courbe représentative du cosinus entre $-\pi$ et $\pi$ :




   (d) $A_0 = \left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$, $A_+ = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $A_- = \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.
   (e) <u>1^er^ cas</u> : $\alpha \in A_0$. Alors $z = 0$.
   <u>2^ème^ cas</u> : $\alpha \in A_+$. Alors $z = (\cos\alpha)e^{i\theta}$.
   <u>3^ème^ cas</u> : $\alpha \in A_-$. Alors $z = (-\cos\alpha)e^{i(\theta+\pi)}$.
6. (a) $u + iv = u' + iv'$ n'implique pas $u = u'$ et $v = v'$. Ce n'est le cas que si $u, u', v, v'$ sont réels. *Contre-exemple* : $0 + i(-i) = 1 + i \times 0$, pourtant $0 \neq 1$.
   (b) $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$.
   (c) $\overline{u+iv} = \overline{u} - i\overline{v}$.
   (d) $|u+v|^2 = (u+v) \times \overline{u+v} = u\overline{u} + u\overline{v} + v\overline{u} + v\overline{v} = |u|^2 + |v|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u\overline{v})$
   $= |u|^2 + |v|^2 + 2\,\mathrm{Re}(v\overline{u})$.

7. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $z_n = (1+i\sqrt{3})^n - (1-i\sqrt{3})^n$. On pose : $w = 1+i\sqrt{3}$.

(a) $z_n = w^n - (\overline{w})^n$.

(b) $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ lorsque $n$ est un <u>entier</u> (positif ou négatif).

(c) $w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(d) $\forall z \in \mathbf{C}$, $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

(e) $z_n = w^n - (\overline{w})^n = 2^n e^{\frac{ni\pi}{3}} - 2^n e^{-\frac{ni\pi}{3}} = 2^n \times \left(e^{\frac{ni\pi}{3}} - e^{-\frac{ni\pi}{3}}\right)$

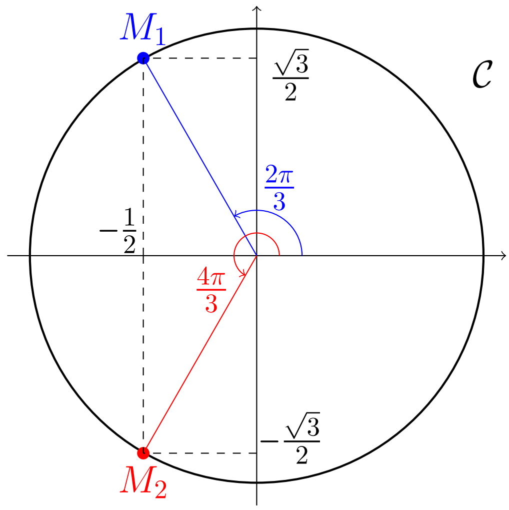
$= 2^n \times 2i\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) = \lambda_n i \sin(\theta_n)$ en posant : $\boxed{\lambda_n = 2^{n+1} \text{ et } \theta_n = \dfrac{n\pi}{3}}$

(f) $|i| = 1$ donc $|z_n| = 2^{n+1}\left|\sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right|$. On en déduit :

⋆ si $n$ est multiple de 3 : $z_n = 0$.

⋆ sinon : $|z_n| = 2^n\sqrt{3}$.

8. Soit $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.




(a) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) $M_1$ image de $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $M_2$ image de $e^{\frac{4i\pi}{3}}$ :

(c) On en déduit que : $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

et $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

(d) $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

(e) $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

(f) L'argument *principal* de $j^2$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

(g) On a : $j^2 = \overline{j}$.

(h) $j^3 = (e^{\frac{2i\pi}{3}})^3 = e^{2i\pi}$ donc $\boxed{j^3 = 1.}$

(i) $S = 1 + j + j^2 = \dfrac{1-j^3}{1-j}$ (somme géométrique de raison $j \neq 1$) donc $\boxed{S = 0.}$

(j) Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors :
$(1+j)^{3n} = (-j^2)^{3n} = (-1)^{3n} j^{6n} = (-1)^n (j^3)^{2n}$ donc $\boxed{(1+j)^{3n} = (-1)^n.}$

9. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On pose : $Z = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$.

(a) Forme algébrique de $Z$ : on développe grâce au binôme de Newton.

$Z = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$

$\boxed{Z = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta).}$

(b) Forme exponentielle de $Z$ : on utilise la formule de Moivre.

$$\boxed{Z = (e^{i\theta})^3 = e^{3i\theta}.}$$

(c) Expression de $\sin(3\theta)$ : on identifie les parties imaginaires.

$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$ puis on remplace $\cos^2$ par $1 - \sin^2$

$\sin(3\theta) = 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta$ donc $\boxed{\forall\theta\in\mathbf{R},\ \sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.}$

10. Soit l'équation $(E) : \sqrt{3}\cos(t) - \sin(t) = 1$.

    On pose $z = \sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}$ donc en divisant par $|z| = 2$ :

    $(E) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t + \left(-\dfrac{1}{2}\right)\sin t = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\cos t + \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin t = \dfrac{1}{2}$

    $(E) \Leftrightarrow \cos\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ donc à $2\pi$ près : $t + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ ou $-\dfrac{\pi}{3}$

    Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}.}$

11. Soit l'équation $(E) : 5z^2 - 4z + 1 = 0$.

    $(E)$ est une équation du second degré à coefficients réels.

    On calcule son discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4\times 5\times 1 = -4 < 0$

    On trouve deux solutions complexes conjuguées : $\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{\dfrac{2+i}{5}\,;\,\dfrac{2-i}{5}\right\}.}$

**Thème 2 : Analyse réelle**

12. On pose $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+2x-3}$.

    (a) $x_0 = 1$ : on pose $t = x - 1$. On a alors :

    $$f(x) = f(1+t) = \frac{\sqrt{1+t-1}}{(1+t)^2 + 2(1+t) - 3} = \frac{\sqrt{t}}{4t+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{4t} = \frac{1}{4\sqrt{t}}$$

    donc $\boxed{f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{4\sqrt{x-1}} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty.}$

    (b) $x_0 = 2$ : $f$ est continue en 2 donc $\boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = \dfrac{1}{5} \text{ et } f(x) \underset{2}{\sim} \dfrac{1}{5}.}$

    (c) $x_0 = +\infty$ : $x - 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ donc $\sqrt{x-1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x}$ (élévation à la puissance 1/2)

    et $x^2 + 2x - 3 \underset{+\infty}{\sim} x^2$, donc par quotient : $\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{x^2} = x^{-\frac{3}{2}}}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

13. Études de limites :

    (a) $\dfrac{\sin(2t)}{\ln(1+t)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2t}{t} = 2$ par équivalents usuels et quotient d'équivalents,

    donc $\boxed{\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(2t)}{\ln(1+t)} = 2.}$

(b) On pose $x = t - 1$. On a alors $x \to 0$.
D'une part, $e^t - e = e^{1+x} - e = e(e^x - 1) \underset{0}{\sim} ex$.
D'autre part, $\sqrt{t} - 1 = \sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.
Par quotient d'équivalents : $\dfrac{e^{1+x} - e}{\sqrt{1+x} - 1} \underset{0}{\sim} \dfrac{ex}{\frac{x}{2}} = 2e$ donc $\boxed{\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{e^t - e}{\sqrt{t} - 1} = 2e.}$

14. Soit $f$ définie sur $\mathbf{R}^\star$ par : $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{e^x - 1}$.
On étudie la limite de $f$ en 0 : $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
donc par quotient : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x} = \dfrac{x}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
$\boxed{\text{On peut prolonger } f \text{ par continuité en 0 en posant : } f(0) = 0.}$

15. Étude de $f : x \longmapsto \cos(\sqrt{x})$.
$\star$ L'ensemble de définition de $f$ est $\mathbf{R}_+$ car $\sqrt{x}$ existe si et seulement si $x \geqslant 0$.
$\star$ Par opérations, $f$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$.
$\star$ On pose $t = \sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$. Quand $x \to 0$, on a $t \to 0$ donc on peut effectuer un développement limité de $f(x) = f(t^2) = \cos(t) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$.
Donc : $f(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x}{2} + \mathrm{o}(x)$. L'existence d'un développement limité d'ordre 1 en 0 prouve la dérivabilité de $f$ en 0, et donne : $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}_+ \text{ et } f'(x) = \begin{cases} -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}}$

16. On pose pour $x > 0$ : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1 + x^2}$ et $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x)$.
(a) <u>Étude de $g$</u> : $g$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ par opérations, et :
$\forall x > 0,\ g'(x) = 2x - 4x\ln(x) - 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = -4x\ln(x)$
On a donc : $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in ]0, 1]$ et on en déduit les variations de $g$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $\Vert$ $1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Justification des limites :

$\ast$ en 0, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

$\ast$ en $+\infty$, $g(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln x)$ donc par opérations, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$.

(b) Équation $g(x) = 0$ :

D'après **16(a)**, $\forall x \in ]0,1]$, $g(x) \geqslant 1$ donc $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0,1]$.
Sur **l'intervalle** $I = [1, +\infty[$, $g$ est **strictement décroissante** et **continue**.
D'après le théorème de la bijection, $g$ réalise une bijection de $I$ dans $g(I) = ]-\infty, 2]$.
Puisque $0 \in g(I)$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$, avec $\alpha \in I$.

(c) Signe de $g$ : on déduit de la question précédente le signe de $g(x)$.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

(d) Variations de $f$ :

$f$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ par opérations, et :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (1 + x^2) - \ln(x) \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2\ln(x)}{x(1 + x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1 + x^2)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g(x)$. On en déduit :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2\alpha^2}$ | $\searrow$ | $0$ |

Justification des limites et du maximum :

$\ast$ en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ par opérations

$\ast$ en $+\infty$ : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissances comparées

$\ast$ D'après son tableau de variations, $f$ admet un maximum $M$ atteint en $\alpha$.

Or $g(\alpha) = 0$ donc $1 + \alpha^2 = 2\alpha^2\ln(\alpha)$. Ainsi, $M = f(\alpha) = \dfrac{\ln(\alpha)}{1+\alpha^2} = \dfrac{\ln\alpha}{2\alpha^2\ln\alpha} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$

17. Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

(a) Ensemble de définition :

Le trinôme $x^2 + x + 1$ a un discriminant $\Delta = -3 < 0$ donc il ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.
Le signe du coefficient dominant permet d'affirmer que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$.
En conséquence, $\boxed{\mathcal{D} = \mathbf{R}.}$

(b) Dérivée de $f$ : Par opérations, $f$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+x+1} - (2x+1)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} = \frac{4(x^2+x+1)-(2x+1)^2}{2(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{3}{2(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}.}$

(c) Limites : par règle des équivalents des fonctions polynomiales en $\pm\infty$, $2x+1 \underset{\pm\infty}{\sim} 2x$ et $x^2+x+1 \underset{\pm\infty}{\sim} x^2$ donc en appliquant la puissance $1/2$ puis par quotient : $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = \frac{2x}{|x|} = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$

On en déduit que : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -2.}$

(d) $f$ bijective :
$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) > 0$ donc $f$ est **strictement croissante** et **continue** sur **l'intervalle $\mathbf{R}$**. D'après le théorème de la bijection, $f$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R}) = ]-2,2[ = J$.

(e) Propriétés de $f^{-1}$ :
$f^{-1}$ est une bijection strictement croissante et continue de $J$ sur $\mathbf{R}$.
Puisque $f$ est dérivable et que $f'$ ne s'annule pas, $f^{-1}$ est dérivable sur $J$.

(f) Valeur de $(f^{-1})'(1)$ :
On a : $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'\circ f^{-1}(1)}$. On voit facilement que $f(0) = 1$, donc $f^{-1}(1) = 0$.
Ainsi, $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$. Conclusion : $\boxed{(f^{-1})'(1) = \frac{2}{3}.}$

18. Étude du sinus cardinal

(a) Régularités de $f$ sur $\mathbf{R}^\star$ :

Par opérations, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^\star)$ et $\boxed{\forall x \neq 0,\ f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.}$

(b) Continuité en 0 :
$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. $\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$

(c) Dérivabilité en 0 :
$f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x}(x + o(x^2)) = 1 + o(x)$, donc $f$ admet en 0 un DL d'ordre 1.

$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0, \text{ et } f'(0) = 0.}$

(d) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ :
On a vu que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^\star)$, la question est donc de savoir si $f'$ est continue en 0.

On effectue un DL de $f'(x)$ pour $x \to 0$, $x \neq 0$ :

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \underset{0}{=} \frac{1}{x^2}\Big(x\big(1+o(x)\big) - x + o(x^2)\Big) = \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1)$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, ainsi $f'$ est continue en 0. $\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}).}$

(e) Variations de $f$ sur $[0,\pi]$ :

$g$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ par opérations, et :

$\forall x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x \leqslant 0$ sur $[0,\pi]$.

Ainsi $g$ est décroissante sur $[0,\pi]$, avec $g(0) = 0$ donc $\boxed{g \text{ est négative sur } [0,\pi].}$

$f'(x)$ est du signe de $g(x)$ donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0,\pi].}$

(f) Solution $\alpha_n$ de $(E_n)$ : $\quad (E_n) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ x \in I_n \end{cases}$

Sur $I_n$, le sinus garde un signe constant donc $g'$ aussi.

Ainsi, $g$ est **continue** et **strictement monotone** sur **l'intervalle** $I_n$.

Elle réalise donc une bijection de $I_n$ sur $g(I_n)$.

De plus, $g(n\pi) = n\pi\cos(n\pi) - \sin(n\pi) = n\pi(-1)^n$

et $g\big((n+1)\pi\big) = (n+1)\pi\cos\big((n+1)\pi\big) - \sin\big((n+1)\pi\big) = (n+1)\pi(-1)^{n+1}$.

On en déduit que $g(n\pi)$ et $g\big((n+1)\pi\big)$ sont de signes contraires : $0 \in g(I_n)$.

Conclusion : $\boxed{\exists! \alpha_n \in I_n \mid g(\alpha_n) = 0.}$

(g) Variations de $f$ sur $I_n$ :

$\star$ si $n$ pair : $g(n\pi) = n\pi > 0$ donc $g \geqslant 0$ sur $[n\pi, \alpha_n]$ et $g \leqslant 0$ sur $[\alpha_n, (n+1)\pi]$.

On a : $\boxed{f \text{ croissante sur } [n\pi, \alpha_n] \text{ et décroissante sur } [\alpha_n, (n+1)\pi].}$

$\star$ si $n$ impair : $g(n\pi) = -n\pi < 0$ donc $g \leqslant 0$ sur $[n\pi, \alpha_n]$ et $g \geqslant 0$ sur $[\alpha_n, (n+1)\pi]$.

On a : $\boxed{f \text{ décroissante sur } [n\pi, \alpha_n] \text{ et croissante sur } [\alpha_n, (n+1)\pi].}$

(h) Limite en $+\infty$ et asymptote :

$\forall x > 0$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes :

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$ Ainsi, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

(i) Courbe représentative de $f$ :