On considère la fonction F définie sur $\mathbf{R}_+^\star$ par :

$$F(x) = \int_1^x \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} \, \mathrm{d}t.$$

1. Programmer sous python une fonction `F(x)` prenant en entrée un flottant `x` et renvoyant en sortie une valeur approchée calculée par la méthode des rectangles du réel $F(x)$.

2. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^\star$ et préciser la monotonie de F.

3. *Étude en 0 de F.*

a) Montrer que : $\forall \alpha \in [1;+\infty[\quad \alpha \leq \mathrm{e}^\alpha$.

b) Montrer alors que : $\forall x \in]0;1] \quad F(x) \leq \ln x$.

c) Étudier la limite de F en 0.

4. *Étude en $+\infty$.*

a) Montrer que : $\forall x \geq 1 \quad F(x) \geq x - 1$.

b) Montrer à l'aide d'un changement de variables que : $\forall x > 1 \quad F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{e^s}{s^2} \mathrm{d}s$.

c) Établir à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall x \in]1;+\infty[\quad F(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e} + R(x)$$

où R est une fonction à préciser.

d) Montrer que : $\forall x \in]1;+\infty[\quad 0 \leq R(x) \leq \mathrm{e} \ln x$.

e) En déduire un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

5. On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbf{R}_+^\star$ avec condition initiale :

$$(E) \left\{ \begin{array}{rcl} xy' + 2y & = & \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \\ y(1) & = & 0 \end{array} \right.$$

.

a) Résoudre l'équation (E), et exprimer la solution obtenue w en termes de F.

b) Calculer les limites w en 0 et en $+\infty$.

c) Donner l'équation de la tangente à la courbe de z au point d'abscisse $x = 1$.

d) Tracer sa courbe représentative sous python.