

Devoir de Mathématiques

numéro 2

L'épreuve dure 2h.

Le sujet comporte deux problèmes et un exercice indépendants.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

03 octobre 2026

Problème A : Tri par insertion et complexité

Le principe du tri par insertion consiste à consulter une liste L non vide de flottants et construire une liste LT contenant les mêmes éléments que L rangés dans l'ordre croissant. Pour cela, On initialise $LT = L[0]$. Puis on ajoute dans LT les éléments de L un par un, en faisant attention de les insérer à leur place correcte, c'est-à-dire en premier, entre $LT[i]$ et $LT[i + 1]$ ou en dernier. On décompose alors le programme python en deux modules :

- une fonction $\ll \text{def inserer}(LC, x) : \gg$ déterminant, en fonction d'une liste non vide croissante de flottants LC et d'un flottant x , la liste $L2$ résultat de l'insertion correcte de x dans LC pour que $L2$ soit encore croissante ;
- une fonction $\ll \text{def tri}(L) : \gg$ renvoyant, à partir de L , la version triée dans l'ordre croissant en utilisant la fonction *inserer*.

On appellera complexité le nombre total de comparaisons effectuées entre deux nombres pour aboutir à l'opération souhaitée.

On supposera que la complexité de la fonction *inserer*(LC, x) dépend seulement de la longueur n de la liste LC et de la façon dont elle est programmée, et on la notera $c_1(n)$ ou $c_2(n)$ ou... en numérotant les façons 1, 2...

On notera de même $f_1(n)$ ou $f_2(n)$... la complexité totale de la fonction *tri*(L) en fonction de $n = \text{len}(L)$.

1 Première programmation python et évaluation de base.

1. Écrire une fonction *tri* effectuant le travail demandé.

On supposera ici déjà programmée la fonction *inserer* à utiliser.

2. En déduire comment calculer $f(n)$ à partir des $c(k)$ où $k \in \mathbb{N}$.

3. Dans la fonction *inserer*, indiquer à quelle(s) condition(s) on insère x dans LC :

(i) en premier (ii) entre $LC[i]$ et $LC[i + 1]$ (iii) en dernier

4. On propose ici une première version "naïve" de la fonction *inserer* en parcourant LC de gauche à droite jusqu'à trouver la bonne position où insérer x .

- (a) Compléter la fonction *inserer1*(LC, x) : ci-dessous :

```
ℓ1    def inserer1(LC,x) :  
ℓ2        i = 0 ; n = len(LC)  
ℓ3        while ... partie à compléter  
ℓ4            i = i+1  
ℓ5        return LC[:i]+[x]+LC[i:]
```

- (b) La complexité $c_1(n)$ ne dépend-elle ici vraiment que de n ?

Indiquer dans quelle configuration elle est la plus faible et dans quelle configuration elle est la plus grande, donner les valeurs $c_{min}(n)$ et $c_{max}(n)$ correspondantes, et justifier que «en moyenne» on accepte la valeur $c_1(n) = (n + 1)/2$.

- (c) Calculer la complexité totale minimale $f_{min}(n)$ et maximale $f_{max}(n)$ en indiquant à chaque fois comment est la liste L initiale

et calculer la «complexité moyenne» $f_1(n)$ à partir des valeurs $c_1(k)$.

- (d) Vérifier que, lorsque n tend vers l'infini, $f_1(n) \sim n^2/2$.

2 Seconde programmation python.

On propose ici une version de la fonction *insérer* inspirée de la méthode de dichotomie. On localise la position finale de x entre deux indices a et b dont l'écart se réduit à chaque tour de moitié (environ) jusqu'à ce que a et b soient consécutifs.

1. Compléter la fonction *insérer1*(LC, x) : ci-dessous :

```

ℓ1      def insérer2(LC,x) :
ℓ2          a,b = 0,len(LC)
ℓ3          while ...    partie à compléter
ℓ4              m = (a+b)//2
ℓ5              if LC[m]>x :
ℓ6                  ...    partie à compléter
ℓ7              else :
ℓ8                  ...    partie à compléter
ℓ9          return LC[:b]+[x]+LC[b:]

```

2. Indiquer dans un tableau les valeurs de a et b initiales, à l'issue du tour n°1, à l'issue du tour n°2... et indiquer le nombre de tours et la complexité $c_2(n)$ lorsque :
 - (i) $LC = [0, 1, 4, 9, 16]$ et $x = 2$
 - (ii) $LC = [0, 1, 4, 9, 16]$ et $x = 12$
 - (iii) $LC = [0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49]$ et $x = 30$.
3. Justifier que, si n est une puissance de 2, alors la complexité $c_2(n)$ ne dépend vraiment que de n .
4. On conviendra alors, "au pire" que, si $2^p < n \leq 2^{p+1}$, alors $c_2(2^p) \leq c_2(n) = c_2(2^{p+1})$ et on notera, lorsque $p \in \mathbb{N}$, $u_p = c_2(2^p)$.
Justifier que $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et ensuite que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = p$.
5. Montrer que, lorsque n tend vers l'infini, $c_2(n) \sim \log_2(n) = \ln(n)/\ln(2)$.

On admettra, dans ce cas, que, lorsque n tend vers l'infini, $f_2(n) \sim \sum_{k=1}^n \ln(k)/\ln(2)$.

3 Évaluation du coût de la seconde programmation.

On cherche un équivalent simple de $f_2(n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ à comparer avec $n^2/2$ équivalent de $f_1(n)$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt$.
2. En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $\int_1^n \ln(t) dt \leq \sum_{k=2}^n \ln(k) \leq \int_2^{n+1} \ln(t) dt$.
3. Chercher et trouver une primitive de la fonction $\ln$.
4. Montrer que, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.
5. Déterminer un équivalent simple de $f_2(n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ à comparer avec $n^2/2$ équivalent de $f_1(n)$.

Exercice B : Théorème de hachage

Le principe du hachage temporel consiste à utiliser une fonction T -périodique g et à calculer la valeur moyenne sur $[0, T]$ du produit d'une fonction f (le signal de référence) par la fonction $t \mapsto g(nt)$ (fonction de hachage de pulsation n) lorsque n est « grand ». On admet que, via un changement de variable affine, on peut se ramener au cas où $T = 1$ de sorte que l'on travaille sur le segment $[0, 1]$ et que l'on étudie la limite de la « valeur moyenne » qui est donc égale à $\int_0^1 f(t) * g(nt) dt$.

Dans tout le problème on supposera que les fonctions f et g sont continues par morceaux sur le segment $[0, 1]$, on rappelle que g est 1-périodique et on admettra qu'on peut toujours appliquer, et sans justification à part indiquer le changement effectué, un changement de variable affine à l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.

On notera également $I = \int_0^1 f(t) dt$, $J = \int_0^1 g(t) dt$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n} * \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

4 Calculs préliminaires : On fixe d'abord un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $H_n = \int_0^1 f(t) * g(nt) dt$.

1. Montrer que $H_n = \frac{1}{n} * \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f\left(\frac{x}{n}\right) * g(x) dx$.

On pourra effectuer un changement de variable dans l'intégrale H_n pendant le calcul.

2. En déduire que $H_n = \int_0^1 \frac{1}{n} * \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+u}{n}\right) * g(u) du$.

On posera d'abord « $x = k + u$ » dans l'intégrale avant de poursuivre le calcul.

3. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, alors :

$$\text{propriété (*)} \quad \exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall (a, b) \in [0, 1]^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq M * |b - a|.$$

NB : on dit alors que la fonction f est M -lipschitzienne.

4. Montrer que, si f vérifie la propriété (*), alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq \left| f\left(\frac{k+x}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M * \frac{x}{n}.$$

5. En déduire, lorsque f vérifie la propriété (*), que $0 \leq |H_n - S_n * J| \leq \frac{M}{n} * \int_0^1 x * g(x) dx$.

5 Réponse et exemples

On suppose ici que f vérifie la propriété (*).

On notera que c'est vrai notamment si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$.

1. Montrer que $H_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} I * J$.

2. Déterminer la limite des coefficients de Fourier $a_n = \int_0^1 f(t) * \cos(2\pi nt) dt$ et $b_n = \int_0^1 f(t) * \sin(2\pi nt) dt$.

3. Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, retrouver les limites de a_n et de b_n avec une intégration par parties.

4. Montrer que la fonction $\delta : (t \mapsto t - \lfloor t \rfloor)$ est 1-périodique et continue par morceaux sur $[0, 1]$.

NB : on appelle δ la fonction « partie décimale ».

Déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de $\int_0^1 f(t) * \delta(nt) dt$.

5. On définit une fonction h 1-périodique sur $\mathbb{R}$ par : $h(t) = 1$ si $\lfloor t \rfloor \leq t \leq 0.5 + \lfloor t \rfloor$ et $h(t) = 0$ sinon.

Déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de $\int_0^1 f(t) * h(nt) dt$.

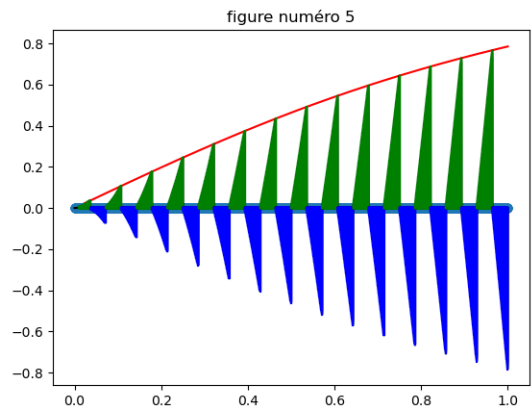
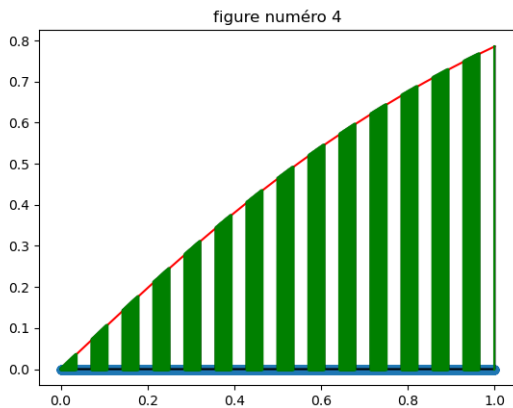
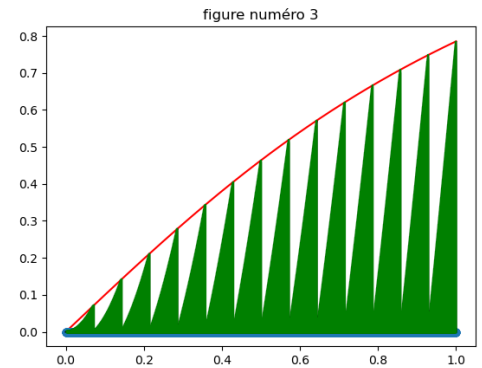
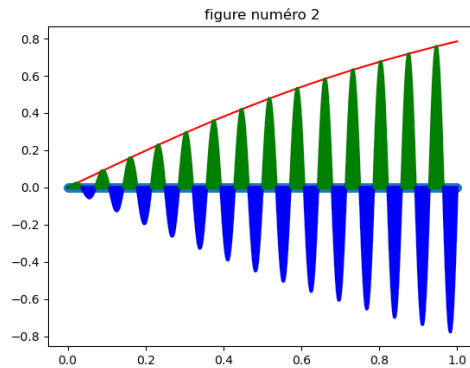
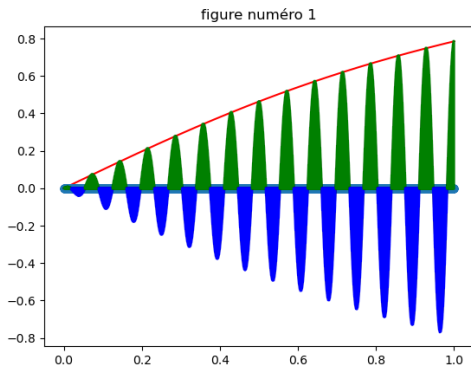
6. On définit la fonction 1-périodique D sur $\mathbb{R}$ par $D(t) = 2t$ si $t \in [0, 0.5]$ et $D(t) = -2t + 1$ si $t \in [0.5, 1[$.

Déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de $\int_0^1 f(t) * D(nt) dt$.

Ci-dessous des illustrations graphiques sous forme d'aires colorées (positives en vert, négatives en bleu) du nombre H_n lorsque $n = 14$ et f est la fonction *Arctangente* (courbe tracée en rouge).

Les figures sont numérotées dans l'ordre des fonctions g proposées en exemple :

$$(1) g(t) = \cos(2\pi t) \quad (2) g(t) = \sin(2\pi t) \quad (3) g(t) = \delta(t) \quad (4) g(t) = h(t) \quad (5) g(t) = D(t)$$



Exercice C : Fonction ζ de Riemann

On note, pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

6 Convergence de série et existence de $\zeta(x)$

- Rappeler la nature des séries $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ et le théorème de comparaison par inégalité relatif aux séries à termes positifs.
- Montrer que, lorsque $x \geq 2$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^x}$ converge, et lorsque $x \leq 1$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^x}$ diverge.
- On fixe un réel $x > 1$.
 - Montrer que :
 - $\forall k \in \llbracket 1, +\infty \llbracket, \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{k^x}$
 - $\forall k \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \quad \frac{1}{k^x} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^x} dt.$
 - En déduire que, pour tout $n \geq 2$, $1 + \frac{1}{n^x} + \int_2^n \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^x} dt.$
 - Donner une primitive F de $t \rightarrow \frac{1}{t^x}$ sur $]0, +\infty[$ et trouver sa limite en $+\infty$.
 - Conclure à la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^x}$.
 - Montrer que $1 + \frac{2^{1-x}}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$. (*)
- Étudier la monotonie de la fonction ζ sur $]1, +\infty[$.
- Montrer que la fonction ζ possède des limites en 1^+ et en $+\infty$ que l'on déterminera.

7 Continuité de la fonction ζ

- On fixe un réel $\alpha > 0$.
 - On fixe ici un entier $k \geq 2$ et deux réels $x, y \in [1 + 2\alpha, +\infty[$ et on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction $f : \left(t \rightarrow \frac{1}{k^t}\right)$.
 - Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée de f .
 - Appliquer le théorème des accroissements finis et montrer que,
$$0 \leq \frac{1/k^x - 1/k^y}{(y-x)} \leq \frac{\ln(k)}{k^{1+2\alpha}}.$$
 - Rappeler $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(k)}{k^\alpha}$ et justifier que, à partir d'un certain rang K_0 , $0 \leq \frac{\ln(k)}{k^{1+2\alpha}} \leq \frac{1}{k^{1+\alpha}}.$
 - Quelle est la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{k^{1+2\alpha}}$?
 - Conclure qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [1 + 2\alpha, +\infty[^2$, $|\zeta(x) - \zeta(y)| \leq M * |x - y|.$
- Montrer que la fonction ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Fin du sujet