

TD 4 : suites numériques

Exercice 40

Pour chaque suite, on travaille quand $n \rightarrow +\infty$.

1. $u_n = e^{n+1} - n^2$. Comme $n^2 = o(e^{n+1})$,

$$u_n = e^{n+1} \left(1 - n^2 e^{-(n+1)} \right) = e^{n+1} (1 + o(1)).$$

$$\boxed{u_n \sim e^{n+1}}, \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty}.$$

2. $u_n = \ln(e^n - n^2)$.

$$e^n - n^2 = e^n (1 - n^2 e^{-n}), \quad \ln(1 - x) = -x + o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

Donc

$$u_n = n + \ln(1 - n^2 e^{-n}) = n - n^2 e^{-n} + o(n^2 e^{-n}).$$

$$\boxed{u_n \sim n}, \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty}.$$

3. $u_n = (1 - e^{-n})^n$.

$$\ln u_n = n \ln(1 - e^{-n}) = -n e^{-n} + o(n e^{-n}),$$

d'où, en exponentiant,

$$u_n = 1 - n e^{-n} + o(n e^{-n}).$$

$$\boxed{u_n = 1 - n e^{-n} + o(n e^{-n}) \Rightarrow u_n \sim 1}, \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1}.$$

4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}}, \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0}.$$

5. $u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{\ln n}$.

$$\ln(n^2 + 1) = \ln n^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 2 \ln n + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc

$$u_n = \frac{2 \ln n + o(1)}{\ln n} = 2 + o(1).$$

$$\boxed{u_n \sim 2}, \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2}.$$

$$6. \quad u_n = n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{n}{2} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right). \text{ Avec } \ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$u_n = \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = 1 + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\boxed{u_n \sim 1}, \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1}.$$

Exercice 41

Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2k+n}{n^2 + kn + k^2}.$$

En factorisant n :

$$\frac{2k+n}{n^2 + kn + k^2} = \frac{(2\frac{k}{n}) + 1}{n(1 + \frac{k}{n} + (\frac{k}{n})^2)} = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad f(x) = \frac{2x+1}{1+x+x^2}.$$

Ainsi

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

qui est une somme de Riemann de f sur $[0, 1]$ (la présence des deux bornes n'ajoute qu'un terme d'ordre $O(\frac{1}{n})$). Comme f est continue sur $[0, 1]$, la limite existe et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx.$$

Or

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \left[\ln(x^2+x+1) \right]',$$

d'où

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\ln(x^2+x+1) \right]_0^1 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2k+n}{n^2 + kn + k^2} = \ln 3}.$$

Exercice 42

On définit $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n}.$$

1. **Positivité.** Par récurrence : $u_0 > 0$. Si $u_n > 0$ alors $e^{-u_n} > 0$ et

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0.$$

Donc $\boxed{u_n > 0 \text{ pour tout } n}.$

2. **Convergence de (u_n) .** Pour $u_n > 0$, on a $e^{-u_n} < 1$, d'où

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n} < u_n.$$

Ainsi (u_n) est strictement décroissante et minorée par 0, donc converge vers une limite $\ell \geq 0$. En passant à la limite dans la récurrence,

$$\ell = \ell e^{-\ell} \implies \ell = 0 \quad (\text{car } \ell > 0 \Rightarrow e^{-\ell} = 1 \Rightarrow \ell = 0).$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0}.$$

3. **Convergence de $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.** En utilisant la définition,

$$v_n = \frac{1}{u_n e^{-u_n}} - \frac{1}{u_n} = \frac{e^{u_n} - 1}{u_n}.$$

Comme $u_n \rightarrow 0^+$ et $e^x = 1 + x + o(x)$ quand $x \rightarrow 0$,

$$v_n = \frac{(1 + u_n + o(u_n)) - 1}{u_n} = 1 + o(1).$$

De plus, pour tout $x > 0$, $\frac{e^x - 1}{x} \geq 1$, donc $v_n \geq 1$. On peut même noter que la fonction $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est croissante sur $]0, +\infty[$ (dérivée $\frac{e^x(x-1)+1}{x^2} > 0$), et comme (u_n) est décroissante, (v_n) est décroissante.

$$\boxed{v_n \downarrow 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1}.$$

Exercice 43

On considère la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1 - u_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Préliminaire : monotonie. Pour tout n ,

$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0,$$

avec égalité $\Leftrightarrow u_n = 0$. Donc (u_n) est *décroissante* (et strictement décroissante tant qu'elle n'a pas atteint 0).

Points fixes. Une éventuelle limite ℓ doit vérifier $\ell = \ell - \ell^2$, d'où

$$\boxed{\text{seul point fixe : } \ell = 0}.$$

Étude selon u_0 .

- $u_0 = 0$. Alors $u_n = 0$ pour tout n .

$$\boxed{u_n \equiv 0}.$$

- $0 < u_0 \leq 1$. Par récurrence, $0 < u_n \leq 1$ et la suite est décroissante, donc converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$ qui vérifie l'équation des points fixes : $\ell = 0$.

$$u_n \downarrow 0.$$

Asymptotique (bonus). Pour $u_n > 0$, posons $v_n = \frac{1}{u_n}$. Alors

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n(1 - u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1 - u_n}.$$

Comme $u_n \rightarrow 0$, on a $v_{n+1} - v_n = 1 + o(1)$, donc $v_n = n + C + o(n)$ et

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

- $u_0 = 1$. On a $u_1 = 0$ puis $u_n = 0$ pour $n \geq 1$.

$$u_0 = 1 \Rightarrow u_1 = 0, \text{ puis } u_n \equiv 0.$$

- $u_0 > 1$. Alors $u_1 = u_0(1 - u_0) < 0$; on retombe au cas négatif ci-dessous et la suite reste décroissante et non minorée.

$$u_n \rightarrow -\infty.$$

- $u_0 < 0$. Posons $w_n = -u_n > 0$. Alors

$$w_{n+1} = -u_{n+1} = -(u_n - u_n^2) = w_n + w_n^2 \geq (1 + w_0)w_n,$$

d'où $w_n \geq w_0(1 + w_0)^n \rightarrow +\infty$. Donc $u_n = -w_n \rightarrow -\infty$. Par ailleurs, si $u_n \leq -1$ alors $u_{n+1} \leq u_n - 1$, ce qui confirme la divergence.

$$u_n \downarrow \text{ et } u_n \rightarrow -\infty.$$

Synthèse.

u_0	comportement de (u_n)
$u_0 = 0$	$u_n \equiv 0$
$0 < u_0 \leq 1$	$u_n \downarrow 0$ et $u_n \sim \frac{1}{n}$
$u_0 = 1$	$u_1 = 0$, puis $u_n \equiv 0$
$u_0 > 1$	$u_n \rightarrow -\infty$
$u_0 < 0$	$u_n \rightarrow -\infty$

Exercice 44

On définit $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

1. **Pour tout** $n \geq 1$, $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 < f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{égalité ssi } x = 0).$$

Donc $u_1 = f(u_0) \in]0, \frac{1}{2}]$, et par récurrence $u_n = f(u_{n-1}) \in]0, \frac{1}{2}]$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi

$$u_n \in [0, \frac{1}{2}] \text{ pour tout } n \geq 1.$$

2. **Équation $f(x) = x$: existence et unicité, avec $a \in [0, \frac{1}{2}]$.** Comme $f(x) > 0$, toute solution vérifie $x \geq 0$. Sur $[0, +\infty[$, $g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante car

$$g'(x) = f'(x) - 1 \leq 0 - 1 < 0.$$

Or $g(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $g(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc il existe une unique solution $a \geq 0$. De plus $f([0, \frac{1}{2}]) \subset [f(\frac{1}{2}), f(0)] = [1/\sqrt{5}, \frac{1}{2}] \subset [0, \frac{1}{2}]$, donc $a \in [0, \frac{1}{2}]$. On peut expliciter a :

$$x = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \iff x^2 = \frac{1}{4(1+x^2)} \iff 4x^4 + 4x^2 - 1 = 0.$$

En posant $y = x^2 \geq 0$, $4y^2 + 4y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$, d'où

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

3. **Majoration de $|f'(x)|$ sur $[0, \frac{1}{2}]$.** On a

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-(1+x^2)^{-3/2} \cdot x \cdot 2 \right) = -\frac{x}{2(1+x^2)^{3/2}}.$$

Ainsi, pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$|f'(x)| = \frac{x}{2(1+x^2)^{3/2}} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{4}.$$

$$\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

4. **Contraction et convergence de (u_n) .** Pour $n \geq 1$, $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ et $a \in [0, \frac{1}{2}]$. Par le théorème des accroissements finis,

$$|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)| \leq \sup_{[0, \frac{1}{2}]} |f'| |u_n - a| \leq \frac{1}{4} |u_n - a|.$$

Par récurrence,

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |u_1 - a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc (u_n) converge vers a , quel que soit $u_0 \in \mathbb{R}$.

$$\forall u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_n \longrightarrow a = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{avec} \quad |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |u_1 - a|.$$

Exercice 45

On définit

$$u_0 > -2, \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{où} \quad f(x) = \frac{1}{2+x} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

- 1) **Positivité et mise sous contrôle.** Comme $u_0 > -2$, on a $2 + u_0 > 0$ et donc

$$u_1 = \frac{1}{2+u_0} > 0.$$

Puis, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n \geq 0 \Rightarrow 2 + u_n \geq 2 \Rightarrow \boxed{0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}}.$$

En particulier,

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad u_n \in]0, \frac{1}{2}]}.$$

2) Point fixe et unicité. Résolvons $f(x) = x$:

$$x = \frac{1}{2+x} \iff x(2+x) = 1 \iff x^2 + 2x - 1 = 0.$$

On obtient

$$x = -1 \pm \sqrt{2}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{a = \sqrt{2} - 1 \in]0, \frac{1}{2}]}$$

(le second zéro $-1 - \sqrt{2} < -2$ est hors domaine utile). De plus f est strictement décroissante ($f'(x) = -1/(2+x)^2 < 0$), donc *au plus un* point fixe sur tout intervalle ; il est donc unique.

3) Contraction sur $[0, \frac{1}{2}]$. Pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$|f'(x)| = \frac{1}{(2+x)^2} \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, pour $x, y \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4} |x - y|}.$$

4) Convergence de la suite. D'après (1), $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ pour tout $n \geq 2$. En appliquant l'inégalité de contraction avec $y = a$,

$$\boxed{|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4} |u_n - a| \quad (n \geq 2)}.$$

Par récurrence,

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} |u_2 - a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc (u_n) converge vers a .

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a = \sqrt{2} - 1, \quad |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} |u_2 - a| \quad (n \geq 2)}.$$

Exercice 46

1. **Encadrement du pas logarithmique.** La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}.$$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}}.$$

2. **Monotonie, bornitude et conclusion pour** $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) \leq 0,$$

par (1), et même

$$u_{n+1} - u_n \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0,$$

donc (u_n) est strictement décroissante.

Bornitude supérieure : en sommant l'inégalité de gauche de (1) pour $k = 1, \dots, n-1$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln n \implies \boxed{u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \leq 1}.$$

Bornitude inférieure : de l'inégalité de droite de (1) sommée pour $k = 1, \dots, n$,

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = u_n + \ln n \implies \boxed{u_n \geq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0}.$$

Ainsi (u_n) est décroissante et bornée ($0 < u_n \leq 1$), donc converge ; notons

$$\boxed{u_n \downarrow \gamma \in]0, 1]}.$$

(La constante γ est la constante d'EulerMascheroni.)

3. **Équivalent de** $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Par définition, $v_n = u_n + \ln n$ avec $u_n \rightarrow \gamma$. Donc

$$v_n = \ln n + \gamma + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

En particulier,

$$\boxed{v_n \sim \ln n}.$$

Exercice 47

On considère la fonction $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}.$$

1. **Existence et unicité de α_n (réduction TVI / bijection).**

On considère $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$. La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$, avec

$$f(1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Existence (TVI). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha_n > 1$ tel que $f(\alpha_n) = n$.

Unicité (théorème de la bijection). On calcule

$$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2} > 0 \quad (x \geq 1),$$

donc f est *strictement croissante* sur $[1, +\infty[$. Par le théorème de la bijection (continuité + stricte monotonie), f est bijective de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, d'où l'*unicité* de α_n vérifiant $f(\alpha_n) = n$.

Enfin, comme $f(\alpha_n) = n \rightarrow +\infty$ et f est croissante,

$$\boxed{\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty}.$$

2. (a) **Minoration de α_n .**

On calcule

$$f(e^n) = \frac{e^n \cdot n}{e^n + 1} = n \left(1 - \frac{1}{e^n + 1} \right) < n.$$

Comme f est croissante et $f(\alpha_n) = n$, on en déduit

$$\boxed{\alpha_n > e^n}.$$

(b) **Équivalent de α_n .**

De $f(\alpha_n) = n$ on tire

$$n = \frac{\alpha_n \ln \alpha_n}{\alpha_n + 1} = \ln \alpha_n - \frac{\ln \alpha_n}{\alpha_n + 1}.$$

Ainsi

$$\ln \alpha_n = n + \frac{\ln \alpha_n}{\alpha_n + 1}.$$

D'après (a), $\alpha_n \geq e^n$, donc

$$0 \leq \frac{\ln \alpha_n}{\alpha_n + 1} \leq \frac{\ln \alpha_n}{e^n} = \frac{n + o(1)}{e^n} = o(1).$$

Par conséquent $\ln \alpha_n = n + o(1)$, d'où

$$\boxed{\alpha_n = e^{n+o(1)} \implies \alpha_n \sim e^n}.$$

Exercice 48

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x - n \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. **Zéros de f_n pour $n \geq 3$.** On a

$$f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x - n}{x}, \quad f''_n(x) = \frac{n}{x^2} > 0.$$

Ainsi f_n est convexe, strictement *décroissante* sur $]0, n]$ puis *croissante* sur $[n, +\infty[$. De plus

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty, \quad f_n(1) = 1 > 0, \quad f_n(n) = n(1 - \ln n) < 0 \quad (n \geq 3), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Par continuité et par la forme en $\cup$, l'équation $f_n(x) = 0$ coupe l'axe en deux points : il existe un unique $u_n \in]1, n[$ et un unique $v_n \in]n, +\infty[$ tels que $f_n(u_n) = f_n(v_n) = 0$.

$$\boxed{\text{Il existe un unique } u_n \in]1, n[\text{ et un unique } v_n \in]n, +\infty[\text{ tels que } f_n(u_n) = f_n(v_n) = 0}.$$

Comme $v_n > n$ et $f_n(v_n) = 0 \iff v_n = n \ln v_n$, on en déduit $v_n \rightarrow +\infty$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty}.$$

2. **Signe de $f_{n+1}(u_n)$ et monotonie de $(u_n)_{n \geq 3}$**

De $f_n(u_n) = 0$ on tire $u_n = n \ln u_n$. Alors

$$f_{n+1}(u_n) = u_n - (n+1) \ln u_n = (u_n - n \ln u_n) - \ln u_n = -\ln u_n < 0$$

(car $u_n > 1$). De plus $f_{n+1}(1) = 1 > 0$.

Sur $]0, n+1[$, on a $f'_{n+1}(x) = 1 - \frac{n+1}{x} < 0$, donc f_{n+1} y est *strictement décroissante*.

- *Existence* : comme f_{n+1} est continue et que $f_{n+1}(1) > 0$ tandis que $f_{n+1}(u_n) < 0$, il existe un $c \in]1, u_n[$ tel que $f_{n+1}(c) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires).

- *Unicité* : sur $]0, n+1[$, f_{n+1} est strictement décroissante ; par le *théorème de la bijection* (continuité + stricte monotonie), l'équation $f_{n+1}(x) = 0$ admet donc une unique solution dans $]0, n+1[$.

On note cette solution u_{n+1} . Comme f_{n+1} est décroissante et $f_{n+1}(1) > 0 > f_{n+1}(u_n)$, on a nécessairement

$$\boxed{1 < u_{n+1} < u_n}.$$

Il s'ensuit que $(u_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante.

3. **Convergence de $(u_n)_{n \geq 3}$.** La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. Elle est donc convergente : il existe une limite $\ell \geq 1$ telle que $u_n \downarrow \ell$.

$$\boxed{u_n \downarrow \ell \text{ avec } \ell \geq 1}.$$

4. **Calcul de la limite :** $\ell = 1$. De $f_n(u_n) = 0 \iff u_n = n \ln u_n$ on déduit

$$\ln u_n = \frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc $u_n \rightarrow 1$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1}.$$

5. **Équivalent simple de $u_n - 1$.** Écrivons $u_n = 1 + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Alors

$$\ln u_n = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2}{2} + o(\varepsilon_n^2), \quad \ln u_n = \frac{u_n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

À l'ordre principal, $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n}$.

$$\boxed{u_n - 1 \sim \frac{1}{n}}.$$

(*Bonus* : en poursuivant, on obtient $u_n - 1 = \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.)

Exercice 49

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. **Suites extraites adjacentes.** On remarque que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} > 0, \quad u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0,$$

d'où $(u_{2n})_{n \geq 1}$ est croissante. De même

$$u_{2n+3} - u_{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 0,$$

donc $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ est décroissante. Enfin, $u_{2n} < u_{2n+1}$ car $u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} > 0$, et

$$u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont donc *adjacentes*, hence convergent vers une même limite, et la suite (u_n) converge elle aussi.

La suite (u_n) est convergente.

2. Identité finie. Pour $x \neq -1$, la somme géométrique donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{1 - (-1)^n x^n}{1 + x},$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k + \frac{(-1)^n x^n}{1 + x} = \frac{1}{1 + x}.$$

3. Intégration sur $[0, 1]$ et limite. En intégrant l'identité précédente entre 0 et 1 (et en échangeant somme et intégrale car il s'agit d'une somme finie), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (-x)^k dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

Or

$$\int_0^1 (-x)^k dx = \frac{(-1)^k}{k+1},$$

donc, en posant $j = k + 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} = u_n.$$

Il vient

$$u_n + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \ln 2 \implies u_n = \ln 2 - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

Comme $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$ sur $[0, 1]$, on a

$$|u_n - \ln 2| = \left| \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ln 2.$$

Exercice 50

On suppose $0 < u_0 \leq v_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1) Invariance d'ordre et encadrement. Par inégalité arithmético-géométrique, pour $a, b > 0$, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. En l'appliquant à (u_n, v_n) ,

$$0 < u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2} = v_{n+1}.$$

De plus, si $0 < u_n \leq v_n$ alors $u_n \leq \sqrt{u_n v_n}$ (car $u_n \leq v_n$) et $\frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n$. Ainsi

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

Par récurrence, on obtient

$$0 < u_n \leq v_n \text{ pour tout } n, \quad (u_n) \text{ croissante, } (v_n) \text{ décroissante}.$$

En particulier, (u_n) est minorée par 0 et (v_n) est majorée par v_0 .

2) Contraction de l'écart. On calcule

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2}{2}.$$

Comme $(\sqrt{v} - \sqrt{u})^2 \leq v - u$ pour $0 < u \leq v$,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (v_n - u_n).$$

Par itération,

$$0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

3) Convergence et limite commune. La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 : il existe une limite $L \in]0, +\infty[$. La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0 : il existe une limite $M \in [0, +\infty[$. Comme $0 \leq v_n - u_n \rightarrow 0$, on a nécessairement $L = M$.

$$\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent et ont la même limite.}$$

(Remarque. Cette limite commune est la moyenne arithmético-géométrique de u_0 et v_0 .)