TD 5 : modèles de dynamique des populations

Exercice 51

On considère, avec $P_0 > 0$ et $K_0, K > 0$ tels que $K_0 < K$,

$$P_{n+1} = \frac{K_0\, P_n}{P_n + K} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

1. **Positivité.** Par récurrence : $P_0 > 0$ et, si $P_n > 0$ alors $P_n + K > 0$ et $K_0 > 0$, donc

$$\boxed{P_{n+1} = \frac{K_0\, P_n}{P_n + K} > 0 \quad \text{pour tout } n}.$$

2. **Suite arithmético-géométrique pour** $Q_n = \frac{1}{P_n}$. En inversant la récurrence,

$$Q_{n+1} = \frac{P_n + K}{K_0 P_n} = \frac{1}{K_0} + \frac{K}{K_0}\, Q_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ainsi (Q_n) est arithmético-géométrique de raison $r = \frac{K}{K_0} > 1$ et de terme constant $c = \frac{1}{K_0}$:

$$\boxed{Q_{n+1} = r\, Q_n + c, \quad r = \frac{K}{K_0} > 1, \quad c = \frac{1}{K_0}}.$$

3. **Forme explicite et comportement de** (P_n)**.** En itérant,

$$Q_n = r^n Q_0 + c \sum_{j=0}^{n-1} r^j = r^n \left(Q_0 + \frac{c}{r-1} \right) - \frac{c}{r-1}.$$

Comme $\dfrac{c}{r-1} = \dfrac{1/K_0}{(K/K_0) - 1} = \dfrac{1}{K - K_0}$, on obtient

$$\boxed{Q_n = r^n \left(\frac{1}{P_0} + \frac{1}{K - K_0} \right) - \frac{1}{K - K_0}}.$$

Par conséquent

$$P_n = \frac{1}{Q_n} = \frac{1}{r^n \left(\frac{1}{P_0} + \frac{1}{K - K_0} \right) - \frac{1}{K - K_0}}.$$

Comme $r = \frac{K}{K_0} > 1$, on a $Q_n \sim r^n \left(\frac{1}{P_0} + \frac{1}{K - K_0} \right)$, donc

$$\boxed{P_n \sim \frac{1}{\frac{1}{P_0} + \frac{1}{K - K_0}} \left(\frac{K_0}{K} \right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0}.$$

Interprétation. La population reste positive et décroît géométriquement vers 0. En effet,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{K_0}{P_n + K} < \frac{K_0}{K} < 1,$$

donc (P_n) est strictement décroissante et tend vers l'extinction puisque, avec $K_0 < K$, il n'existe pas d'équilibre positif (l'unique point fixe est $P^* = K_0 - K < 0$).

Exercice 52

Modèle de Ricker. On fixe $0 < \mu < 1$ et $K > 0$. Pour $x \geq 0$, on pose

$$f(x) = x\, e^{\mu(1-x/K)}.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$x_0 \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. **Étude de f.**

   (a) *Points fixes et rôle dynamique.* Résoudre $f(x) = x$ revient à $x\big(e^{\mu(1-x/K)} - 1\big) = 0$. Ainsi, il y a exactement deux solutions

   $$\boxed{\alpha = 0, \qquad \beta = K}.$$

   Si $x_0 = \alpha$, alors $x_n \equiv 0$ (extinction). Si $x_0 = \beta$, alors $x_n \equiv K$ (capacité limite / état d'équilibre).

   (b) *Variations de f.* On a

   $$f'(x) = e^{\mu(1-x/K)}\left(1 - \frac{\mu}{K}\, x\right).$$

   Donc

   $$\boxed{f \text{ croît sur } [0, K/\mu], \quad f'(K/\mu) = 0, \quad f \text{ décroît sur } [K/\mu, +\infty[}.$$

   En particulier $K < K/\mu$ et $f(K) = K$.

   (c) *Signe de $f(x) - x$ pour $x \geq 0$.* Comme

   $$f(x) - x = x\big(e^{\mu(1-x/K)} - 1\big),$$

   on obtient

   $$\boxed{f(x) - x \begin{cases} = 0, & x = 0 \text{ ou } x = K, \\ > 0, & x \in]0, K[, \\ < 0, & x > K. \end{cases}}$$

2. **Cas** $x_0 \in]0, K[$.

   (a) *Fonction Python `X`.*

   ```
   def X(n, x0, mu, K):
   x = x0
   out = [x0]
   for _ in range(n):
   x = x * (2.718281828459045 ** (mu * (1 - x / K)))
   out.append(x)
   return out
   ```

   (b) *Conjectures numériques (avec $K = 1000$).* Pour divers $x_0 \in]0, K[$ et $\mu \in (0, 1)$, on observe que (x_n) est croissante et semble converger vers K.

   (c) *Variations rigoureuses.* Pour $x \in]0, K[$, on a $f(x) \in]x, K[$ (car f croît sur $[0, K]$ et $f(K) = K$). Par récurrence,

   $$x_0 \in]0, K[\implies x_n \in]0, K[\text{ et } x_{n+1} > x_n.$$

   $$\boxed{(x_n) \text{ est croissante et majorée par } K}.$$

(d) *Convergence.* La suite croissante et majorée converge vers une limite $L \in]0, K]$. Comme $L = f(L)$ et que, sur $[0, K]$, les seuls points fixes sont 0 et K, on conclut (impossible d'atteindre 0 en étant croissante $\subset]0, K[$) :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = K}.$$

3. **Mêmes questions avec** $x_0 \in [\,K,\, K/\mu\,]$.

Sur $[K, K/\mu]$, on a f croissante et $f(x) \leq x$ (point (1c)), avec $f(K) = K$. Ainsi $x_0 \in [\,K,\, K/\mu\,] \Rightarrow x_{n+1} \in [\,K,\, x_n\,]$.

$$\boxed{(x_n) \text{ est décroissante et minorée par } K \;\Rightarrow\; x_n \to K}.$$

4. **Cas** $x_0 \in [\,K/\mu,\, +\infty[$.

(a) *Conjecture.* La suite tombe rapidement sous ou à proximité de K, puis converge vers K (éventuellement de manière monotone après un rang).

(b) *Il existe un unique* $\gamma \in [\,K/\mu, +\infty[$ *tel que* $f(\gamma) = K$. La fonction $h(x) = f(x) - K$ est continue et strictement décroissante sur $[K/\mu, +\infty[$. De plus

$$h(K/\mu) = \frac{K}{\mu}\, e^{\mu-1} - K = K\left(\frac{e^{\mu-1}}{\mu} - 1\right) > 0 \quad (\text{car } 0 < \mu < 1 \Rightarrow e^{\mu-1} > \mu),$$

et $h(x) \to -K < 0$ quand $x \to +\infty$. Il existe donc un unique $\gamma \in [\,K/\mu, +\infty[$ tel que $f(\gamma) = K$.

(c) *Convergence.*

- Si $x_0 \geq \gamma$, alors $x_1 = f(x_0) \leq f(\gamma) = K$, puis on retombe au cas 2 : $x_n \to K$ en étant croissante à partir de x_1.
- Si $x_0 \in [K/\mu, \gamma)$, alors $K < f(x_0) < x_0$ (point (1c) et f décroissante sur $[K/\mu, +\infty[$). Par récurrence, $K < x_{n+1} < x_n$, donc (x_n) est décroissante et minorée par K, hence $x_n \to L \geq K$. La limite vérifie $L = f(L)$, d'où $L = K$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas } x_0 \geq K/\mu, \;\; x_n \to K}.$$

5. **Script Python (cas de la question 3) : plus petit n tel que $x_n \geq K/2$.**

```
def hitting_time_halfK(x0, K, mu):
"""
Retourne le plus petit n tel que x_n >= K/2
pour la dynamique x_{n+1} = x_n * exp(mu * (1 - x_n / K)),
en partant de x0 (cas x0 >= K/mu).
"""
n = 0
x = x0
target = K / 2.0
while x < target:
x = x * (2.718281828459045 ** (mu * (1 - x / K)))
n += 1
return n
```

$$\boxed{\text{La dynamique converge toujours vers } K \text{ pour } 0 < \mu < 1,\; x_0 \geq 0}.$$

Exercice 53

Modèle de JohnsonSchumacher (JS). On fixe $r > 0$ et $K > 0$. Sur $]0, +\infty[$, on considère l'EDO

$$(JS) \qquad y' = r\,y\,\big(\ln(y/K)\big)^2.$$

1. **Solutions constantes.** Si $y \equiv C > 0$ est constante, alors $0 = r\,C\,(\ln(C/K))^2$, d'où $\ln(C/K) = 0$ et $C = K$. (Le membre de droite n'étant pas défini en $y = 0$, $y \equiv 0$ n'est pas solution de (JS).)

$$\boxed{\text{La seule solution constante (sur }]0,+\infty[\text{) est } y \equiv K}.$$

2. **Solution non constante avec $y(0) = y_0 \in]0, K[$ ne prenant jamais les valeurs 0 et K.** Posons

$$u(t) = \ln\big(y(t)/K\big) \qquad \Rightarrow \qquad u'(t) = \frac{y'}{y} = r\,u(t)^2.$$

Avec $u(0) = u_0 = \ln(y_0/K) < 0$, on résout l'EDO séparée $u' = ru^2$:

$$\frac{u'}{u^2} = r \;\Rightarrow\; -\frac{1}{u(t)} = rt + C, \qquad u(t) = \frac{u_0}{1 - rt\,u_0}.$$

On en déduit

$$\boxed{y(t) = K \exp\left(\frac{u_0}{1 - rt\,u_0}\right), \qquad u_0 = \ln\frac{y_0}{K}\ (< 0).}$$

(a) *Signe et majoration.* Pour tout t de l'intervalle de définition, $u(t) \in]u_0, 0[$, donc $0 < y(t) = Ke^{u(t)} < K$.

$$\boxed{\forall t,\ 0 < y(t) < K}.$$

(b) *Domaine maximal.* Le dénominateur $1 - rt\,u_0$ s'annule en $t_* = \frac{1}{ru_0} < 0$. La solution est donc définie sur

$$\boxed{I =]\,t_*, +\infty\,[, \qquad t_* = \frac{1}{r\ln(y_0/K)} < 0.}$$

Sur I, $y'(t) = r\,y\,(\ln(y/K))^2 > 0$, donc y est croissante,

$$\boxed{\lim_{t \to t_*^+} y(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = K^-}.$$

3. **Solution pour $y_0 \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{K\}$ (cas général).** Toujours avec $u_0 = \ln(y_0/K) \neq 0$, on obtient

$$\boxed{y(t) = K \exp\left(\frac{u_0}{1 - rt\,u_0}\right)}.$$

Le domaine maximal est l'intervalle où $1 - rt\,u_0 \neq 0$, à savoir

$$\boxed{I = \begin{cases}]\,\frac{1}{ru_0}, +\infty\,[, & \text{si } 0 < y_0 < K\ (u_0 < 0), \\ ]-\infty, \frac{1}{ru_0}\,[, & \text{si } y_0 > K\ (u_0 > 0). \end{cases}}$$

Comportements limites :

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < y_0 < K : \quad y \text{ croît sur } I,\ y(t) \nearrow K \text{ quand } t \to +\infty; \\ y_0 > K : \quad y \text{ croît sur } I,\ y(t) \to +\infty \text{ quand } t \to \left(\frac{1}{ru_0}\right)^-. \end{array}}$$

4. **Représentation graphique (exemple en `pgfplots`).** Ajouter au préambule :

```
\usepackage{pgfplots}  \pgfplotsset{compat=1.18}
```

Tracer (ex. $r = 0{,}5,\ K = 1$) :

```
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[axis lines=middle, grid=both, xmin=-6, xmax=6, ymin=0, ymax=4,
xlabel={$t$}, ylabel={$y(t)$}, samples=400, domain=-6:6]
% Courbe y=K
\addplot[dashed] {1}; \node at (axis cs:5,1.08) {$y\equiv K$};

% Solutions pour y0<K
\addplot[very thick] { exp( (ln(0.2) )/(1 - 0.5*x*ln(0.2)) ) };
\addplot[very thick] { exp( (ln(0.6) )/(1 - 0.5*x*ln(0.6)) ) };

% Solutions pour y0>K
\addplot[very thick] { exp( (ln(1.5) )/(1 - 0.5*x*ln(1.5)) ) };
\addplot[very thick] { exp( (ln(3)   )/(1 - 0.5*x*ln(3)) ) };
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

Synthèse : $y \equiv K$ est l'équilibre. Si $0 < y_0 < K,\ y(t) \nearrow K;$ si $y_0 > K,\ y(t)$ explose en temps fini.