

TD 6 : polynômes

Exercice 54

On factorise sur $\mathbb{R}[X]$.

1. $P = X^4 + 4$.

$$X^4 + 4 = (X^4 + 4X^2 + 4) - 4X^2 = (X^2 + 2)^2 - (2X)^2 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2).$$

$$\boxed{X^4 + 4 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)}.$$

2. $Q = X^4 + X^2 + 1$.

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^4 + 2X^2 + 1) - X^2 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

$$\boxed{X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)}.$$

3. $R = 2X^3 - 14X + 12$.

$$R = 2(X^3 - 7X + 6), \quad X^3 - 7X + 6 = (X - 1)(X^2 + X - 6) = (X - 1)(X + 3)(X - 2).$$

$$\boxed{2X^3 - 14X + 12 = 2(X - 1)(X - 2)(X + 3)}.$$

Sur $\mathbb{C}[X]$, on factorise entièrement en produits de termes linéaires :

$$\boxed{X^4 + 4 = (X - (1 + i))(X - (1 - i))(X - (-1 + i))(X - (-1 - i))}.$$

$$\boxed{X^4 + X^2 + 1 = \left(X - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)}.$$

Exercice 55

On pose

$$P(X) = X^2 - 2 \cos \theta X + 1, \quad Q(X) = X^{2n} - 2 \cos(n\theta) X^n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Idée clé (racines complexes). On a $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$, d'où

$$P(X) = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X].$$

De même $2 \cos(n\theta) = e^{in\theta} + e^{-in\theta}$, et

$$Q(X) = (X^n - e^{in\theta})(X^n - e^{-in\theta}) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X].$$

Divisibilité. Le facteur $X^n - e^{in\theta}$ s'annule en $X = e^{i\theta}$ (car $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$), donc $X - e^{i\theta}$ le divise. De même, $X^n - e^{-in\theta}$ s'annule en $X = e^{-i\theta}$, donc $X - e^{-i\theta}$ le divise. Par conséquent leur produit $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = P(X)$ divise $Q(X)$.

$$\boxed{P \text{ divise } Q \text{ dans } \mathbb{R}[X] \text{ (et } \mathbb{C}[X])}.$$

Remarque. On peut écrire explicitement

$$Q(X) = P(X) \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{i(\theta+2\pi k/n)}) (X - e^{-i(\theta+2\pi k/n)}),$$

ce qui montre la factorisation complète dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 56

On définit $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+2} = X P_{n+1} - P_n.$$

1. Calculs initiaux et terme dominant.

$$P_2 = X P_1 - P_0 = X^2 - 2, \quad P_3 = X P_2 - P_1 = X^3 - 3X, \quad P_4 = X P_3 - P_2 = X^4 - 4X^2 + 2.$$

Par récurrence sur $n \geq 1$, on vérifie que $\deg P_n = n$ et que le coefficient dominant vaut 1 (la récurrence ajoute une puissance de X et soustrait un polynôme de degré $n-1$).

$$\boxed{\deg P_n = n \text{ et } P_n \text{ est unitaire pour } n \geq 1}.$$

2. Identité de composition.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On montre, par récurrence sur n , que

$$\boxed{P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n} \quad (n \in \mathbb{N})}.$$

Vérification des cas initiaux : $P_0(\cdot) = 2$ et $P_1(z + 1/z) = z + 1/z$. Si l'égalité est vraie aux rangs n et $n+1$, alors

$$P_{n+2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(z + \frac{1}{z}\right) \left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}},$$

ce qui boucle la récurrence.

3. Zéros réels de P_n et factorisation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, posons

$$\alpha_k = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n}\right) = 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

En choisissant $z = e^{i\theta}$ avec $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, on a

$$\alpha_k = z + \frac{1}{z}, \quad P_n(\alpha_k) = z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos(n\theta) = 2 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0.$$

Donc α_k est racine de P_n pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$. De plus, les $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont deux à deux distincts et contenus dans $]0, \pi[$; comme $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, les α_k sont deux à deux distinctes.

Il y a donc exactement n racines réelles distinctes pour P_n , qui est de degré n et unitaire, d'où

$$\boxed{P_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \quad (n \geq 1)}.$$

Exercice 57

Soit $n \geq 2$ et

$$P(X) = (X + i)^n - (X - i)^n \in \mathbb{C}[X].$$

1) Réduction à l'équation $Z^n = 1$. Si $P(X) = 0$, alors $(X + i)^n = (X - i)^n$ et, comme $P(i) = (2i)^n \neq 0$, on peut poser

$$Z = \frac{X + i}{X - i} \implies Z^n = 1.$$

Ainsi $Z = \xi_k = e^{2i\pi k/n}$ pour un certain $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Le cas $k = 0$ donnerait $Z = 1$, soit $X + i = X - i$ (impossible), donc on retient $k = 1, \dots, n-1$.

Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$X + i = \xi_k(X - i) \implies X(1 - \xi_k) = -i(1 + \xi_k) \implies X = -i \frac{1 + \xi_k}{1 - \xi_k}.$$

En écrivant $\xi_k = e^{i\theta_k}$ avec $\theta_k = \frac{2\pi k}{n}$ et en utilisant $\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = i \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on obtient les racines

$$\boxed{X_k = i \cot\left(\frac{\pi k}{n}\right) \quad (k = 1, \dots, n-1).}$$

Ces réels sont deux à deux distincts, donc ce sont toutes les racines (le degré de P est $n-1$).

2) Factorisation et constante principale. On peut écrire

$$P(X) = (X - i)^n (Z^n - 1) = (X - i)^n \prod_{k=0}^{n-1} (Z - \xi_k) = \prod_{k=0}^{n-1} ((1 - \xi_k)X + i(1 + \xi_k)).$$

Le facteur pour $k = 0$ vaut $2i$. En factorisant $(1 - \xi_k)$ pour $k = 1, \dots, n-1$,

$$P(X) = \underbrace{\left(2i \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \xi_k)\right)}_{=:C} \prod_{k=1}^{n-1} (X - X_k).$$

On sait $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \xi_k) = n$ (en dérivant $z^n - 1 = (z - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \xi_k)$ en $z = 1$). Donc

$$C = 2in.$$

Ainsi la factorisation complète sur $\mathbb{C}$ est

$$\boxed{P(X) = 2in \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - i \cot \frac{\pi k}{n}\right).}$$

(Le coefficient de tête est bien $2in$, conforme au terme dominant obtenu en développant $(X \pm i)^n$.)

Exercice 58

On écrit

$$P(X) = a \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \quad p \geq 2, \quad \alpha_1 < \dots < \alpha_p, \quad m_k \in \mathbb{N}^*,$$

et l'on note $d = \deg P = \sum_{k=1}^p m_k \geq 2$, donc $\deg P' = d - 1$.

1) Cas simple : toutes les racines de P sont réelles et simples.

On suppose ici $m_k = 1$ pour tout k . Sur chaque intervalle $I_k =]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ ($1 \leq k \leq p-1$), on a $P \neq 0$ et

$$\frac{P'}{P}(x) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{x - \alpha_j}, \quad \left(\frac{P'}{P}\right)'(x) = -\sum_{j=1}^p \frac{1}{(x - \alpha_j)^2} < 0.$$

La fonction $x \mapsto \frac{P'}{P}(x)$ est donc strictement décroissante sur I_k . De plus, lorsque x tend vers α_k par la droite, $\frac{P'}{P}(x)$ tend vers $+\infty$, et lorsque x tend vers α_{k+1} par la gauche, $\frac{P'}{P}(x)$ tend vers $-\infty$. Par continuité et stricte monotonie (théorème de la bijection), il existe un unique $c_k \in I_k$ tel que $\frac{P'}{P}(c_k) = 0$, c'est-à-dire $P'(c_k) = 0$.

Comme $\left(\frac{P'}{P}\right)'(c_k) < 0$ et $P(c_k) \neq 0$, la racine de P' en c_k est simple. On obtient ainsi exactement $p - 1 = \deg P'$ racines réelles et simples de P' , toutes intercalées entre les α_k :

$$P' \text{ possède } p - 1 \text{ racines réelles et simples, situées dans }]\alpha_k, \alpha_{k+1}[.$$

2) Cas général : racines réelles (multiplicités possibles pour P).

(a) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, on factorise

$$P(X) = (X - \alpha_k)^{m_k} S_k(X), \quad S_k(\alpha_k) \neq 0.$$

Alors

$$P'(X) = m_k(X - \alpha_k)^{m_k-1} S_k(X) + (X - \alpha_k)^{m_k} S'_k(X) = (X - \alpha_k)^{m_k-1} \left(m_k S_k(X) + (X - \alpha_k) S'_k(X) \right).$$

On en déduit que, pour tout k ,

$$(X - \alpha_k)^{m_k-1} \text{ divise } P'$$

et la multiplicité de α_k comme racine de P' est exactement $m_k - 1$.

(b) Sur chaque intervalle $I_k =]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, on a

$$\frac{P'}{P}(x) = \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{x - \alpha_j}, \quad \left(\frac{P'}{P}\right)'(x) = -\sum_{j=1}^p \frac{m_j}{(x - \alpha_j)^2} < 0.$$

La fonction $\frac{P'}{P}$ est donc strictement décroissante sur I_k . Lorsque x tend vers α_k par la droite, $\frac{P'}{P}(x)$ tend vers $+\infty$, et lorsque x tend vers α_{k+1} par la gauche, $\frac{P'}{P}(x)$ tend vers $-\infty$. Il existe alors une unique $c_k \in I_k$ tel que $P'(c_k) = 0$, et cette racine est simple.

Au total, P' possède

$$\sum_{k=1}^p (m_k - 1) \text{ zéros réels situés aux points } \alpha_k \text{ et } (p - 1) \text{ zéros réels } c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[,$$

soit $\sum_{k=1}^p (m_k - 1) + (p - 1) = \left(\sum_{k=1}^p m_k\right) - 1 = \deg P'$ zéros réels (tous ses zéros).

$$\text{Dans le cas général, toutes les racines de } P' \text{ sont réelles.}$$

$$\text{Celles situées entre deux racines consécutives de } P \text{ sont simples.}$$