

TD 7 : espaces vectoriels

Exercice 59

On travaille sur l'espace vectoriel (réel) des fonctions suffisamment régulières sur $\mathbb{R}$, et sur $\mathbb{R}[X]$ pour les polynômes.

1. $E_1 = \{ y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^2 \text{ telles que } x y'' + (x^2 + 1) y' + 3y = 0 \}$.

L'opérateur différentiel

$$L[y] = x y'' + (x^2 + 1) y' + 3y$$

est linéaire. Si y_1 et y_2 sont des solutions et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$L[\lambda y_1 + \mu y_2] = \lambda L[y_1] + \mu L[y_2] = 0.$$

Par conséquent E_1 est stable par combinaisons linéaires et contient la fonction nulle ; c'est un sous-espace vectoriel.

$E_1 \text{ est un espace vectoriel (sur } \mathbb{R} \text{)}.$

2. $E_2 = \{ y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ telles que } (x^2 - 1) y' - 2x y = x e^x \}$.

Il s'agit de l'ensemble des solutions d'une équation *linéaire non homogène*. La fonction nulle n'appartient pas à E_2 puisque

$$(x^2 - 1) \cdot 0 - 2x \cdot 0 = 0 \text{ alors que } x e^x \neq 0 \text{ pour } x \neq 0.$$

Ainsi E_2 n'est pas stable par combinaison linéaire (par exemple, si y est solution, $2y$ ne l'est pas). Ce n'est pas un espace vectoriel ; c'est un affine de direction l'ensemble des solutions de l'homogène associée.

$E_2 \text{ n'est pas un espace vectoriel}.$

3. $E_3 = \{ P \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que } P(1) = 0 \}$.

L'application d'évaluation $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(1)$ est linéaire. Son noyau est précisément E_3 . Un noyau d'application linéaire est un sous-espace vectoriel. De plus, pour tout $P \in E_3$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - 1)Q$, d'où $E_3 = (X - 1)\mathbb{R}[X]$.

$E_3 \text{ est un espace vectoriel, et } E_3 = (X - 1)\mathbb{R}[X].$

Exercice 60

$$1. \begin{cases} -2x - y + 5z = 1, \\ x - 2y - t = 2, \\ -x + y + z + u = 1. \end{cases}$$

Étapes de résolution. De $x - 2y - t = 2$ on tire $x = 2 + 2y + t$. En remplaçant dans $-2x - y + 5z = 1$,

$$-2(2 + 2y + t) - y + 5z = 1 \implies y = -1 - \frac{2}{5}t + z.$$

Alors

$$x = 2 + 2y + t = 2 + 2\left(-1 - \frac{2}{5}t + z\right) + t = \frac{1}{5}t + 2z.$$

Enfin, $-x + y + z + u = 1$ donne

$$u = 1 + x - y - z = 2 + \frac{3}{5}t.$$

Présentation de l'ensemble des solutions et structure.

L'ensemble des solutions est : $\left\{ \left(\frac{1}{5}t + 2z, -1 - \frac{2}{5}t + z, z, t, 2 + \frac{3}{5}t \right) \mid t, z \in \mathbb{R} \right\}$.

C'est un **sous-espace affine** de $\mathbb{R}^5$ de direction $\text{Vect}\left(\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 1, \frac{3}{5}\right), (2, 1, 1, 0, 0)\right)$ et de dimension 2.

$$2. \begin{cases} mx - y + mz = 1, \\ x - y + z + t = m, \\ x + (m - 2)y + mz + t = 1, \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$$

Étapes communes. En soustrayant la deuxième équation de la troisième,

$$(m - 1)(y + z + 1) = 0.$$

Cas $m \neq 1$. Alors $y = -z - 1$.

• Si $m \neq 0$, la première équation donne $mx - (-z - 1) + mz = 1$, soit $mx + (m + 1)z = 0$, donc

$$x = -\frac{m + 1}{m}z.$$

La deuxième équation fournit

$$t = m - x + y - z = (m - 1) - \frac{m - 1}{m}z.$$

Présentation et structure (cas $m \neq 0, 1$).

L'ensemble des solutions est : $\left\{ (0, -1, 0, m - 1) + z\left(-\frac{m + 1}{m}, -1, 1, -\frac{m - 1}{m}\right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$.

C'est une **droite affine** de direction $\text{Vect}\left(-\frac{m + 1}{m}, -1, 1, -\frac{m - 1}{m}\right)$.

• Si $m = 0$, le système devient

$$\begin{cases} -y = 1, \\ x - y + z + t = 0, \\ x - 2y + t = 1, \end{cases} \implies y = -1, \quad z = 0, \quad t = -x - 1.$$

Présentation et structure (cas $m = 0$).

L'ensemble des solutions est : $\{(0, -1, 0, -1) + x(1, 0, 0, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

C'est une **droite affine** de direction $\text{Vect}(1, 0, 0, -1)$.

Cas $m = 1$. On a

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ x - y + z + t = 1, \end{cases} \implies t = 0,$$

et $x = 1 + y - z$ avec y, z libres.

Présentation et structure (cas $m = 1$).

L'ensemble des solutions est : $\{(1, 0, 0, 0) + y(1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

C'est un **plan affine** de direction $\text{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0))$.

Exercice 61

On se place dans $\mathbb{R}^3$. Une famille est libre si la seule combinaison linéaire $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$ est la combinaison triviale $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

1. $u = (-1, 3, 2)$, $v = (1, -1, -3)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (les rapports $\frac{1}{-1}$, $\frac{-1}{3}$, $\frac{-3}{2}$ ne sont pas égaux).
Donc la famille (u, v) est libre.

La famille (u, v) est libre.

2. $u = (-1, 0, 1)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (-1, 1, 0)$.

On remarque $u + v = (-1, 1, 0) = w$. Il existe donc une relation non triviale $w - u - v = 0$, ce qui montre que la famille n'est pas libre.

La famille (u, v, w) est liée (car $w = u + v$).

3. $u = (1, 1, 1)$, $v = (-1, 1, 1)$, $w = (1, -1, 1)$.

Les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, donc ils engendrent un plan. Si w appartenait à $\text{Vect}(u, v)$, il existerait des réels a, b tels que $w = au + bv$. En coordonnées :

$$\begin{cases} 1 = a - b, \\ -1 = a + b, \\ 1 = a + b. \end{cases}$$

Les deux dernières égalités imposent simultanément $a + b = -1$ et $a + b = 1$, ce qui est impossible. Donc $w \notin \text{Vect}(u, v)$. Par conséquent, les trois vecteurs u, v, w sont linéairement indépendants.

La famille (u, v, w) est libre.

4. $u = (1, -1, -1)$, $v = (1, 2, 1)$, $w = (3, -1, 1)$, $x = (2, -1, 1)$.

Quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ ne peuvent pas être libres (dimension 3). On peut exhiber une relation linéaire explicite en écrivant $x = au + bv + cw$ et en résolvant le système 3×3 par élimination (sans recourir à un déterminant d'ordre 3) : on trouve

$$a = -\frac{3}{8}, \quad b = -\frac{1}{4}, \quad c = \frac{7}{8},$$

d'où

$$x = -\frac{3}{8}u - \frac{1}{4}v + \frac{7}{8}w.$$

La famille (u, v, w, x) est liée ; par exemple $x = -\frac{3}{8}u - \frac{1}{4}v + \frac{7}{8}w$.

Exercice 62

On cherche, pour chaque sous-ensemble, une description ensembliste puis une base (avec la structure de sous-espace vectoriel explicitée).

1) $E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 2x - y + t = 0 \\ x + 2t = 0 \end{array} \right\}.$

Résolution. De $x + 2t = 0$, on déduit $x = -2t$. Puis $2x - y + t = 0$ donne $2(-2t) - y + t = 0$, soit $y = -3t$. La variable z est libre. Ainsi $(x, y, z, t) = (-2t, -3t, z, t) = t(-2, -3, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0)$.

$$E = \{(-2t, -3t, z, t) \mid t, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-2, -3, 0, 1), (0, 0, 1, 0)), \quad \dim E = 2.$$

2) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z = 0\}.$

Résolution. De $3x - 2y + z = 0$, on obtient $z = -3x + 2y$. Les variables x, y, t sont libres. Ainsi $(x, y, z, t) = x(1, 0, -3, 0) + y(0, 1, 2, 0) + t(0, 0, 0, 1)$.

$$F = \{(x, y, -3x + 2y, t) \mid x, y, t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, -3, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 1)), \quad \dim F = 3.$$

3) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y = z = -x + y\}.$

Résolution. La contrainte $3x - 2y = -x + y$ donne $4x = 3y$, donc $y = \frac{4}{3}x$. Alors $z = -x + y = -x + \frac{4}{3}x = \frac{1}{3}x$. Ainsi $(x, y, z) = x(1, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{x}{3}(3, 4, 1)$.

$$G = \{(x, \frac{4}{3}x, \frac{1}{3}x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((3, 4, 1)), \quad \dim G = 1.$$

Exercice 63

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$u_1 = (2, 1, -1), \quad u_2 = (2, -1, 1), \quad u_3 = (3, 0, 1).$$

1) (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Montrons que u_1, u_2, u_3 sont linéairement indépendants. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0.$$

En coordonnées :

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0, \\ \alpha - \beta = 0, \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

De $\alpha - \beta = 0$ on déduit $\alpha = \beta$. La troisième équation impose alors $\gamma = 0$, puis la première donne $4\alpha + 3\gamma = 0$, d'où $\alpha = 0$, donc $\beta = 0$. La combinaison nulle est donc triviale ; la famille est libre. Comme il y a trois vecteurs libres dans $\mathbb{R}^3$, ils forment une base.

$$(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

2) Coordonnées dans $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$.

- Pour $(2, -1, 1)$, on remarque que $(2, -1, 1) = u_2$.

$$[(2, -1, 1)]_{\mathcal{B}} = (0, 1, 0).$$

- Pour $(1, 2, -1)$, on cherche (α, β, γ) tel que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (1, 2, -1)$. En coordonnées :

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 3\gamma = 1, \\ \alpha - \beta = 2, \\ -\alpha + \beta + \gamma = -1. \end{cases}$$

De la deuxième équation, $\alpha = \beta + 2$. En la remplaçant dans la troisième,

$$-\alpha + \beta + \gamma = -1 \iff -(\beta + 2) + \beta + \gamma = -1 \iff \gamma = 1.$$

On insère alors $\alpha = \beta + 2$ et $\gamma = 1$ dans la première équation :

$$2(\beta + 2) + 2\beta + 3 \cdot 1 = 1 \iff 4\beta + 4 + 3 = 1 \iff 4\beta = -6 \iff \beta = -\frac{3}{2}.$$

D'où $\alpha = \beta + 2 = \frac{1}{2}$, et $\gamma = 1$.

$$\text{L'ensemble des solutions est : } \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1 \right) \right\}.$$

Ainsi,

$$[(1, 2, -1)]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1 \right).$$

Exercice 64

On se place dans $\mathbb{R}^3$ avec

$$u_1 = (0, 3, -2), \quad u_2 = (1, 1, -1), \quad u_3 = (3, -3, 1), \quad E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3), \quad D = \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

1. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$. En coordonnées :

$$\begin{cases} \beta + 3\gamma = 0, \\ 3\alpha + \beta - 3\gamma = 0, \\ -2\alpha - \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

De la première équation, $\beta = -3\gamma$. La deuxième donne $3\alpha - 6\gamma = 0$, donc $\alpha = 2\gamma$. La troisième est alors satisfaite pour tout γ . En particulier, avec $\gamma = 1$,

$$2u_1 - 3u_2 + u_3 = 0 \implies u_3 = 3u_2 - 2u_1.$$

Il existe une relation non triviale, donc la famille n'est pas libre et $\dim E = 2$.

$$\text{La famille } (u_1, u_2, u_3) \text{ est liée ; en particulier } u_3 = 3u_2 - 2u_1.$$

2. Base et équation cartésienne de E .

Comme $u_3 = 3u_2 - 2u_1$, on a

$$E = \text{Vect}(u_1, u_2).$$

Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base de E .

Pour obtenir une équation cartésienne, on paramètre E par

$$(x, y, z) = s u_1 + t u_2 = s(0, 3, -2) + t(1, 1, -1) = (t, 3s + t, -2s - t),$$

où $s, t \in \mathbb{R}$. On élimine s, t : de $x = t$ et $y = 3s + x$ on tire $s = \frac{y-x}{3}$. Alors

$$z = -2 \left(\frac{y-x}{3} \right) - x = \frac{-2y-x}{3},$$

soit encore

$$x + 2y + 3z = 0.$$

Une base de E est (u_1, u_2) , $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$.

3. Juxtaposition d'une base de E et d'une base de D .

Une base de E est (u_1, u_2) . Une base de D est $((1, 1, 1))$. Comme $E = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 0\}$, le vecteur $(1, 1, 1)$ n'appartient pas à E (puisque $1 + 2 + 3 = 6 \neq 0$).

Montrons que la famille $(u_1, u_2, (1, 1, 1))$ est libre. Supposons $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma(1, 1, 1) = 0$. Le vecteur $\alpha u_1 + \beta u_2$ appartient à E . S'il existait $\gamma \neq 0$, on aurait $(1, 1, 1) = -\frac{1}{\gamma}(\alpha u_1 + \beta u_2) \in E$, ce qui contredit le fait que $(1, 1, 1) \notin E$. On en déduit $\gamma = 0$, puis $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$ impose $\alpha = \beta = 0$ car (u_1, u_2) est une base de E . La famille $(u_1, u_2, (1, 1, 1))$ est donc libre. Elle contient trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

La juxtaposition (u_1, u_2) (base de E) et $((1, 1, 1))$ (base de D) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 65

On travaille dans $\mathbb{R}^4$ avec

$$u = (1, 0, 0, 1), \quad v = (2, 1, -1, 0), \quad w = (3, 1, -1, 1), \quad x = (5, 2, -2, 1).$$

Étape 1 : montrer que w et x appartiennent à $\text{Vect}(u, v)$. On vérifie directement

$$w = u + v \quad \text{et} \quad x = u + 2v.$$

Ainsi $w, x \in \text{Vect}(u, v)$, d'où

$$\text{Vect}(w, x) \subset \text{Vect}(u, v).$$

Étape 2 : montrer que u et v appartiennent à $\text{Vect}(w, x)$. À partir des égalités précédentes,

$$v = x - w, \quad u = w - v = 2w - x.$$

Donc $u, v \in \text{Vect}(w, x)$, et par conséquent

$$\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(w, x).$$

Des deux inclusions, on déduit l'égalité des sous-espaces engendrés :

$$\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(w, x).$$

Exercice 66

On considère l'équation différentielle

$$y'' - 4y = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R},$$

et l'on note

$$E = \{ y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^2 \mid y'' - 4y = 0 \}.$$

1) E est un espace vectoriel. La fonction nulle appartient à E car $0'' - 4 \cdot 0 = 0$. Si $y_1, y_2 \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$(\alpha y_1 + \beta y_2)'' - 4(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(y_1'' - 4y_1) + \beta(y_2'' - 4y_2) = 0,$$

donc $\alpha y_1 + \beta y_2 \in E$. L'ensemble E est non vide et stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$E \text{ est un sous-espace vectoriel de } C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$

2) Équation caractéristique, base et dimension de E . À l'EDL homogène à coefficients constants

$$y'' - 4y = 0$$

on associe l'équation caractéristique

$$r^2 - 4 = 0,$$

dont les racines réelles et distinctes sont

$$r_1 = 2, \quad r_2 = -2.$$

Le résultat classique donne alors que les *fonctions* solutions

$$f_1 : x \mapsto e^{r_1 x} = e^{2x}, \quad f_2 : x \mapsto e^{r_2 x} = e^{-2x}$$

engendrent l'ensemble des solutions.

On peut vérifier en outre qu'elles sont linéairement indépendantes (même si le cours sur les équations différentielles l'affirme) : si $Af_1 + Bf_2$ est la fonction nulle, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Ae^{2x} + Be^{-2x} = 0$, et en $x = 0$ puis $x = 1$ on obtient $A = B = 0$.

Ainsi,

$E = \text{Vect}(x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{-2x}), \quad \dim E = 2.$

Exercice 67

On travaille dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ et l'on pose

$$P_1 = 1 + X + X^2, \quad P_2 = -1 + X + X^2, \quad P_3 = 1 - X + X^2, \quad \mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3).$$

1. La famille $\mathcal{B}$ est une base de E .

Supposons $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0$. En identifiant les coefficients de $1, X, X^2$, on obtient

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta - \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

En soustrayant la deuxième de la troisième, on trouve $2\gamma = 0$, donc $\gamma = 0$. Puis $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha - \beta = 0$, d'où $\alpha = \beta = 0$. La seule combinaison nulle est donc triviale : la

famille (P_1, P_2, P_3) est libre. Comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ et que la famille libre contient trois polynômes, c'est une base de E .

$$\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].$$

2. Coordonnées de $P(X) = a + bX + cX^2$ dans $\mathcal{B}$.

On cherche (α, β, γ) tel que $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$, soit

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = a, \\ \alpha + \beta - \gamma = b, \\ \alpha + \beta + \gamma = c. \end{cases}$$

En posant $S = \alpha + \beta$ et $D = \alpha - \beta$, on a

$$S = \frac{b+c}{2}, \quad \gamma = \frac{c-b}{2}, \quad D = a - \gamma = a - \frac{c-b}{2} = \frac{2a-c+b}{2}.$$

Ainsi

$$\alpha = \frac{S+D}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad \beta = \frac{S-D}{2} = \frac{c-a}{2}, \quad \gamma = \frac{c-b}{2}.$$

$$[P]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c-a}{2}, \frac{c-b}{2} \right).$$

Exercice 68

On travaille sur $\mathbb{R}$. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} 2a+b & 3b-5c & a \\ -b & a+b-c & a-2c \\ c & b+c & 2b-c \end{pmatrix}, \quad E = \{ M(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On écrit

$$M(a, b, c) = aA + bB + cC$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La matrice nulle appartient à E (prendre $a = b = c = 0$). Si $M(a_1, b_1, c_1), M(a_2, b_2, c_2) \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda M(a_1, b_1, c_1) + \mu M(a_2, b_2, c_2) = M(\lambda a_1 + \mu a_2, \lambda b_1 + \mu b_2, \lambda c_1 + \mu c_2) \in E.$$

L'ensemble E est donc stable par combinaisons linéaires et non vide : c'est un sous-espace vectoriel.

$$E = \{ aA + bB + cC \mid a, b, c \in \mathbb{R} \} \text{ est un sous-espace de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

2) Base et dimension de E . Montrons que A, B, C sont linéairement indépendantes. Soit $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0_{3 \times 3}$. En lisant quelques coefficients :

$$(3, 1) : \gamma = 0, \quad (1, 3) : \alpha = 0, \quad (1, 1) : 2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ainsi A, B, C forment une base $\mathcal{B} = (A, B, C)$ de E , et l'on a

$$E = \text{Vect}(A, B, C), \quad \dim E = 3.$$

Exercice 69

On travaille dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) La famille (A, B, C, D) est une base de E .

Soit une combinaison linéaire nulle $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0_{2 \times 2}$. En identifiant les coefficients, on obtient

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0, \\ \gamma = 0, \\ \alpha + \beta + \delta = 0, \\ \delta = 0. \end{cases}$$

Il vient $\gamma = 0$, $\delta = 0$, puis $\alpha - \beta = 0$ et $\alpha + \beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$. La seule combinaison nulle est la triviale : la famille est libre.

Comme $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ et qu'il y a quatre matrices libres, cette famille est une base de E .

La famille (A, B, C, D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Coordonnées d'une matrice générale dans cette base.

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Cherchons $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$aA + bB + cC + dD = M.$$

Le membre de gauche vaut

$$aA + bB + cC + dD = \begin{pmatrix} a - b + c & c \\ a + b + d & d \end{pmatrix}.$$

On identifie aux coefficients de M , ce qui donne le système

$$\begin{cases} a - b + c = x, \\ c = y, \\ a + b + d = z, \\ d = t. \end{cases}$$

On en déduit $c = y$, $d = t$, puis

$$a - b = x - y, \quad a + b = z - t.$$

En additionnant et en soustrayant,

$$a = \frac{(x - y) + (z - t)}{2}, \quad b = \frac{(z - t) - (x - y)}{2}.$$

L'ensemble des quadruplets (a, b, c, d) tels que $aA + bB + cC + dD = M$ est :

$$\left\{ \left(\frac{x - y + z - t}{2}, \frac{z - t - x + y}{2}, y, t \right) \right\}$$

Ainsi, si l'on note $\mathcal{B} = (A, B, C, D)$, les coordonnées de M dans $\mathcal{B}$ sont

$$[M]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{x - y + z - t}{2}, \frac{z - t - x + y}{2}, y, t \right).$$

Exercice 70

On considère

$$E = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0, P'(0) = 0, P(1) = 0 \}.$$

1. **E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.** Le polynôme nul appartient à E . Si $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$(\alpha P + \beta Q)(0) = \alpha P(0) + \beta Q(0) = 0, \quad (\alpha P + \beta Q)'(0) = \alpha P'(0) + \beta Q'(0) = 0, \quad (\alpha P + \beta Q)(1) = \alpha P(1) + \beta Q(1) = 0.$$

Donc $\alpha P + \beta Q \in E$. L'ensemble E est non vide et stable par combinaisons linéaires : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. **Base et dimension de E .** Écrivons un polynôme général $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Les contraintes donnent

$$P(0) = d = 0, \quad P'(X) = 3aX^2 + 2bX + c \Rightarrow P'(0) = c = 0, \quad P(1) = a + b = 0 \Rightarrow b = -a.$$

Ainsi

$$P(X) = a(X^3 - X^2), \quad a \in \mathbb{R},$$

et l'on obtient

$E = \text{Vect}(X^3 - X^2), \quad \dim E = 1.$

3. **Juxtaposition avec $\mathcal{F} = (1 + X, 1 - X^2, 1 + X^3)$.** La juxtaposition d'une base de E et de $\mathcal{F}$ donne la famille

$$(X^3 - X^2, 1 + X, 1 - X^2, 1 + X^3).$$

Montrons qu'elle est libre. Soit

$$\alpha(X^3 - X^2) + \beta(1 + X) + \gamma(1 - X^2) + \delta(1 + X^3) = 0.$$

En identifiant les coefficients de $X^3, X^2, X, 1$:

$$\begin{cases} X^3 : & \alpha + \delta = 0, \\ X^2 : & -\alpha - \gamma = 0, \\ X^1 : & \beta = 0, \\ X^0 : & \beta + \gamma + \delta = 0. \end{cases}$$

On en déduit successivement $\beta = 0$, $\gamma = -\alpha$, puis $\delta = \alpha$, et enfin $\alpha + \delta = 2\alpha = 0$, donc $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. La famille est libre ; elle contient 4 polynômes dans l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 4 : c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\text{La famille } (X^3 - X^2, 1 + X, 1 - X^2, 1 + X^3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].$