

Programme de colles
Semaine 9 du 24/11 au 28/11/2025

Polynômes à coefficients réels ou complexes

- Monômes, degré, coefficients, polynômes à coefficients réels ou complexes
- Ensembles $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{C}[X]$, ainsi que $\mathbf{R}_n[X]$, $\mathbf{C}_n[X]$ quand $n \in \mathbf{N}$
- Opérations sur les polynômes : somme, produit, composée
- Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée de polynômes
- Une combinaison linéaire de monômes de degrés distincts ne peut être nulle que si tous les coefficients sont nuls
- Polynôme dérivé, degré du polynôme dérivé
- Racines d'un polynôme
- Un polynôme P est factorisable par $X - \alpha$ si, et seulement si, α est une racine de P
- Généralisation à plusieurs racines distinctes
- Ordre de multiplicité d'une racine
- Théorème de d'Alembert-Gauss :
 - * Tout polynôme à coefficients complexes de degré n peut s'écrire $P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$,
 où α_i sont les racines complexes de P , pas nécessairement distinctes, et λ son coefficient dominant.
 - * Tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité
- Un polynôme de degré inférieur ou égal à n ayant au moins $n + 1$ racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, est nul

Espaces vectoriels sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

- Structure d'espace vectoriel ($\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}^I$ où I est un intervalle, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$)
- Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs
- Sous-espaces vectoriels
- Intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels
- Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Notation $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$
- Famille génératrice finie d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence)
- Famille libre finie. Famille liée finie
- Toute famille finie de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre
- Base finie d'un sous-espace vectoriel (sous réserve d'existence)
- Coordonnées d'un vecteur dans une base
- Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base
- Base canonique de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}_n[X]$
- De toute famille génératrice finie d'un espace vectoriel E , on peut extraire une base
- Toutes les bases de E ont le même cardinal
- Dimension d'un espace vectoriel E
- Dans un espace vectoriel de dimension n :
 - * toute famille libre a au plus n éléments
 - * toute famille libre ayant n éléments est une base
 - * toute famille génératrice a au moins n éléments
 - * une famille génératrice ayant n éléments est une base
- Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie alors :
 - * F est de dimension finie
 - * $\dim(F) \leq \dim(E)$
 - * $F = E \Leftrightarrow \dim(F) = \dim(E)$
- Rang d'une famille finie de vecteurs

Questions de cours :

1. si P et Q sont des polynômes non nuls, que dire de :
 $\deg(P + Q), \quad \deg(P \times Q), \quad \deg(P \circ Q) \quad ?$
2. Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ?
3. Qu'appelle-t-on ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme ?
4. Somme et produit des racines d'un trinôme.
5. Si $\alpha \in \mathbf{C}$ est racine de $P \in \mathbf{R}[X]$, que dire de $\bar{\alpha}$?
6. Définition d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E .
7. Définition d'une base et de la dimension d'un espace vectoriel.
8. Définition du rang d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel.
9. Définition d'une famille libre $(u_1, \dots, u_k)$ de vecteurs dans un espace vectoriel E .
10. Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E .
11. Caractérisation à l'aide du rang d'une famille libre de p vecteurs de E de dimension n .
12. Caractérisation à l'aide du rang d'une famille génératrice de p vecteurs de E de dimension n .
13. Caractérisation à l'aide de son rang et de son cardinal d'une base de E de dimension n .
14. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n . On appelle P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Si u est un vecteur de E , quelle relation lie $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u)$?