TD 8 : séries numériques

Exercice 71

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$. C'est une série géométrique de raison $r = -\frac{2}{3}$ (donc absolument convergente) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = -\frac{2}{5}.$$

$$\boxed{-\frac{2}{5}}$$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)\, x^{2n}$.

   Pour $|r| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n\, r^n = \frac{r}{(1-r)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, r^n = \frac{2r^2}{(1-r)^3}.$$

   Ainsi, pour $|r| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)\, r^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, r^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} n\, r^n = \frac{2r^2}{(1-r)^3} + \frac{2r}{(1-r)^2} = \frac{2r}{(1-r)^3}.$$

   Avec $r = x^2$ (condition $|x| < 1$) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)\, x^{2n} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^3}, \quad |x| < 1.$$

$$\boxed{\frac{2x^2}{(1-x^2)^3} \quad \text{pour } |x| < 1}$$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}\, n(n+1)$. C'est le cas précédent avec $r = -\frac{2}{3}$ (le terme $n = 0$ vaut 0) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \left.\frac{2r}{(1-r)^3}\right|_{r=-\frac{2}{3}} = \frac{2\left(-\frac{2}{3}\right)}{\left(1+\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{36}{125}.$$

$$\boxed{-\frac{36}{125}}$$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(2+(-1)^n\right) 3^{-n}$. On sépare :

$$2\sum_{n=2}^{\infty} 3^{-n} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n 3^{-n} = 2\cdot \frac{3^{-2}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{(-\frac{1}{3})^2}{1+\frac{1}{3}} = 2\cdot \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3}+\frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$\boxed{\frac{5}{12}}$$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-n+1}{n!}\, x^n$ (convergence pour tout $x \in \mathbb{R}$). Pour tout réel x,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-n+1}{n!}\, x^n.$$

On utilise les identités $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ (pour $n \geq 1$) et $\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$ (pour $n \geq 2$), puis on fait attention aux bornes.

On écrit

$$n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1,$$

d'où

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Dans la première somme, on pose $k = n-2$ (donc $k \geq 0$) :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k!} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Ainsi

$$S(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = (1+x^2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}.$$

Par définition usuelle de la fonction exponentielle, $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$. Donc

$$\boxed{S(x) = (1+x^2)\, e^x}$$

(valable pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 72

Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}.$$

Convergence (absolue). Pour tout n, $|\cos(nx)| \leq 1$, donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\cos(nx)}{2^n}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Par comparaison avec une série géométrique, la série $S(x)$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n} \text{ converge absolument.}}$$

Complément (valeur de la somme). Posons $a = \frac{1}{2}$. On utilise la série géométrique complexe $\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{ix})^n = \frac{1}{1-ae^{ix}}$ pour $|a| < 1$, puis on prend la partie réelle :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(nx) = \Re\left(\frac{1}{1-ae^{ix}}\right) = \Re\left(\frac{1-ae^{-ix}}{1-2a\cos x + a^2}\right) = \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}.$$

Avec $a = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n} = \frac{1-\frac{1}{2}\cos x}{1-\cos x+\frac{1}{4}} = \frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n} = \frac{4-2\cos x}{5-4\cos x} \quad (\text{pour tout } x \in \mathbb{R}).}$$

Exercice 73

On pose, pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. **Décomposition en éléments simples.** On cherche des réels a, b, c indépendants de n tels que

   $$\frac{n-1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

   En mettant au même dénominateur :

   $$n-1 = a(n+1)(n+2) + b\,n(n+2) + c\,n(n+1).$$

   En identifiant les coefficients de $n^2, n, 1$, on obtient

   $$\begin{cases} a+b+c=0, \\ 3a+2b+c=1, \\ 2a=-1. \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad a=-\frac{1}{2},\quad b=2,\quad c=-\frac{3}{2}.$$

   Ainsi

   $$\boxed{u_n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n+2}}.$$

2. **Nature et somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.** Pour $N \geqslant 1$, posons

   $$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} - \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+2}.$$

On utilise
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k}, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} = \sum_{k=3}^{N+2} \frac{1}{k}.$$
En notant $H_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ (nombre harmonique),
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = H_{N+1} - 1, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} = H_{N+2} - 1 - \frac{1}{2}.$$
Donc
$$S_N = -\frac{1}{2} H_N + 2(H_{N+1} - 1) - \frac{3}{2}\big(H_{N+2} - 1 - \tfrac{1}{2}\big).$$
Comme $H_{N+1} = H_N + \frac{1}{N+1}$ et $H_{N+2} = H_N + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}$, les termes en H_N s'annulent et il reste
$$S_N = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{N+2}.$$
Par passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N \to +\infty} S_N = \frac{1}{4}.$$
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)} \text{ converge et vaut } \frac{1}{4}}.$$

Exercice 74

1. Pour tout entier $k \geq 0$,
$$I_k = \int_0^1 \frac{x^k}{1+x^2}\, dx \leq \int_0^1 x^k\, dx = \frac{1}{k+1}.$$
En particulier, $0 \leq I_k \leq \frac{1}{k+1}$, donc I_k tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.
$$\boxed{I_k \leq \frac{1}{k+1} \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} I_k = 0.}$$

2. Pour tout entier $n \geq 0$,
$$\int_0^1 x^{2n}\, dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1},$$
d'où
$$\boxed{u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} = (-1)^n \int_0^1 x^{2n}\, dx}.$$

3. Posons, pour $N \geq 0$,
$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}\, dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-x^2)^n\right) dx = \int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^{N+1}}{1+x^2}\, dx.$$
Ainsi
$$S_N = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - (-1)^{N+1} \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{2N+2}}{1+x^2}\, dx}_{I_{2N+2}}.$$

Par le point 1, $I_{2N+2} \leq \frac{1}{2N+3}$, donc I_{2N+2} tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. On en déduit

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge et sa somme vaut $\frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}.$$

Exercice 75

1. Soit $x \in [-1,1[$. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $t \neq 1$, on a l'identité (somme géométrique finie)

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k + \frac{t^n}{1-t}.$$

En intégrant cette égalité de 0 à x (somme finie, donc intégration terme à terme permise), on obtient

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k\,dt + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt,$$

c'est-à-dire

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

On en déduit, pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\,.}$$

2. *Conséquences et existence des sommes.*

Cas $x = \frac{1}{2}$. Pour tout $n \geq 1$,

$$\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(1/2)^k}{k} - \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

La majoration $0 \leq t^n \leq (1/2)^n$ pour $t \in [0,1/2]$ donne

$$0 \leq \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq (1/2)^n \int_0^{1/2} \frac{dt}{1-t} = (1/2)^n \big(-\ln(1-1/2)\big) = (1/2)^n \ln 2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k} \quad\iff\quad \boxed{\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k}}.$$

Cas $x = -1$. Pour tout $n \geq 1$,

$$\ln(1-(-1)) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \int_0^{-1} \frac{t^n}{1-t}\,dt,$$

soit

$$\ln 2 = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \int_0^{-1} \frac{t^n}{1-t}\, dt.$$

On majore le reste en valeur absolue en remarquant que pour $t \in [-1, 0]$, on a $\frac{1}{1-t} \leq 1$ et $|t|^n \leq 1$:

$$\left| \int_0^{-1} \frac{t^n}{1-t}\, dt \right| \leq \int_{-1}^{0} \frac{|t|^n}{1-t}\, dt \leq \int_{-1}^{0} |t|^n\, dt = \int_0^1 u^n\, du = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}.$$

Exercice 76

1. On considère, pour $x > 1$, la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x\,\ln x}$. Pour $x > 1$, on a

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2(\ln x)^2} < 0,$$

donc f décroît sur $[1, +\infty[$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$,

$$f(n) \;\geq\; \int_n^{n+1} f(x)\, dx \;\geq\; f(n+1),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{1}{n\,\ln n} \;\geq\; \int_n^{n+1} \frac{dx}{x\,\ln x} \;\geq\; \frac{1}{(n+1)\,\ln(n+1)}}.$$

En outre, comme $0 \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{x\,\ln x} \leq \frac{1}{n\,\ln n}$ et que $\dfrac{1}{n\,\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x\,\ln x} = 0}.$$

2. Posons $S_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\,\ln n}$. En sommant l'inégalité précédente de $n = 2$ à N, on obtient

$$\int_2^{N+1} \frac{dx}{x\,\ln x} \;\leq\; S_N.$$

Pour la majoration supérieure, on isole le premier terme et on somme de $n = 3$ à N :

$$S_N = \frac{1}{2\ln 2} + \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\,\ln n} \;\leq\; \frac{1}{2\ln 2} + \sum_{n=3}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x\,\ln x} \;=\; \frac{1}{2\ln 2} + \int_2^N \frac{dx}{x\,\ln x}.$$

Comme

$$\int_2^t \frac{dx}{x\,\ln x} = \ln\bigl(\ln t\bigr) - \ln\bigl(\ln 2\bigr) \quad (t > 2),$$

il vient

$$\ln\bigl(\ln(N+1)\bigr) - \ln\bigl(\ln 2\bigr) \;\leq\; S_N \;\leq\; \ln\bigl(\ln N\bigr) - \ln\bigl(\ln 2\bigr) + \frac{1}{2\ln 2}.$$

En particulier, S_N n'est pas bornée lorsque N tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ \ln n} \text{ diverge.}}$$

3. Des encadrements précédents, on déduit l'équivalence des sommes partielles :

$$S_N = \ln\bigl(\ln N\bigr) + C_N, \qquad \text{avec } (C_N)_N \text{ bornée.}$$

Ainsi,

$$\boxed{S_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln\bigl(\ln N\bigr)}.$$