TD 9 : théorie basique des probabilités

Exercice 77

Notons D : « pièce défaillante », C : « pièce correcte », et T^+ : « test indique défaillante ».
Données :

$$\mathbb{P}(D) = 0{,}01, \qquad \mathbb{P}(T^+ \mid D) = 0{,}9, \qquad \mathbb{P}(T^+ \mid C) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(T^+) = \mathbb{P}(T^+ \mid D)\,\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T^+ \mid C)\,\mathbb{P}(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}99 = 0{,}009 + 0{,}198 = 0{,}207.$$

Par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(D \mid T^+) = \frac{\mathbb{P}(T^+ \mid D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T^+)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}01}{0{,}207} = \frac{9}{207} = \frac{1}{23} \approx 0{,}0435.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{défaillante} \mid \text{test défaillant}) = \frac{1}{23} \;\approx\; 4{,}35\%}$$

Exercice 78

Soit $n \geq 2$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, l'urne U_k contient n boules noires et $2k$ boules blanches. On choisit l'urne uniformément parmi $U_1, \dots, U_n$, puis on tire une boule.

1. **Probabilité d'obtenir une boule blanche.** Pour chaque k, $\mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(\text{blanche} \mid U_k) = \frac{2k}{n+2k}$. Par la formule des probabilités totales,

$$p_n = \mathbb{P}(\text{blanche}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(U_k)\,\mathbb{P}(\text{blanche} \mid U_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n+2k}.$$

$$\boxed{p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n+2k}}$$

2. **Convergence de $(p_n)_{n\geq 2}$.** Posons $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{2t}{1+2t}$ (fonction continue sur $[0,1]$). Alors

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Il s'agit d'une somme de Riemann de f sur $[0,1]$, qui converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$. Or, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{2t}{1+2t} = 1 - \frac{1}{1+2t}, \qquad \text{d'où} \qquad \int_0^1 \frac{2t}{1+2t}\,dt = \left[t - \frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2}\ln 3.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 1 - \frac{1}{2}\ln 3}.$$

Exercice 79

On considère deux urnes $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$. $\mathscr{U}$ contient α boules blanches et β boules noires, $\mathscr{V}$ contient β boules blanches et α boules noires, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$. Après chaque tirage, on remet la boule et la règle est : si la boule tirée est blanche, le tirage suivant se fait dans $\mathscr{U}$; si elle est noire, le tirage suivant se fait dans $\mathscr{V}$. On note U_n l« événement » {le n-ième tirage se fait dans $\mathscr{U}$}, V_n l« événement » analogue pour $\mathscr{V}$, et B_n l« événement » {le n-ième tirage est blanc}. Posons $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. **Probabilités conditionnelles demandées.**

$$\boxed{\mathbb{P}_{U_n}(B_n) = \mathbb{P}(B_n \mid U_n) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \mathbb{P}_{V_n}(B_n) = \mathbb{P}(B_n \mid V_n) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

Par la règle de passage à l« urne suivante » :

$$\boxed{\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \mathbb{P}_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} \mid \overline{B_n}) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

2. **Relation de récurrence pour p_{n+1}.** Par la formule des probabilités totales conditionnée par B_n ou $\overline{B_n}$:

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n)\, p_n + \mathbb{P}(B_{n+1} \mid \overline{B_n})\,(1-p_n) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\, p_n + \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\, p_n + \frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

3. **Expression explicite de p_n selon le premier tirage.** Notons

$$r = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} \quad (\text{donc } |r|<1), \qquad p^* = \frac{1}{2}.$$

La récurrence linéaire $p_{n+1} = r\, p_n + \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ a pour point fixe $p^* = \frac{1}{2}$ et

$$p_n = p^* + r^{\,n-1}\,(p_1 - p^*).$$

• Si le premier tirage est effectué dans $\mathscr{U}$, alors $p_1 = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$, d'où

$$\boxed{p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r^{\,n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^n}$$

• Si le premier tirage est effectué dans $\mathscr{V}$, alors $p_1 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$, d'où

$$\boxed{p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r^{\,n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^n}$$

4. **Limite de p_n.** Comme $|r|<1$, on a $r^{\,n}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Dans les deux cas initiaux,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}}.$$

Exercice 80

On note $p = \frac{1}{6}$ la probabilité d'obtenir un as à un lancer, et $q = \frac{5}{6}$. La probabilité d'obtenir un nombre pair d'as en N lancers est

$$p_N = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k}.$$

Par le binôme,

$$(p+q)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k}, \qquad (q-p)^N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} p^k q^{N-k}.$$

En ajoutant,

$$(p+q)^N + (q-p)^N = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{N} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = 2\, p_N.$$

Comme $p + q = 1$ et $q - p = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, on obtient

$$\boxed{p_N = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^N\right)}.$$

Exercice 81

1. **Mises en mots (sans vocabulaire symbolique).**
   (a) E_1 : « À partir du cinquième lancer, chaque lancer donne un as. »
   (b) E_2 : « Les quatre premiers lancers ne donnent pas d'as, et à partir du cinquième lancer, chaque lancer donne un as. »
   (c) E_3 : « On obtient au moins une fois l'as après le quatrième lancer. »
2. **Écriture de E_n.** « On obtient au moins une fois l'as après le n-ième lancer. »

$$\boxed{E_n = \bigcup_{k>n} A_k}$$

3. **Monotonie de C_n.** Pour $n > 0$, $C_n = \bigcup_{k>n} A_k$. Si $\omega \in C_{n+1}$, alors il existe $k > n+1$ tel que $\omega \in A_k$. Comme $k > n$, on a $\omega \in C_n$. Donc $\boxed{C_{n+1} \subset C_n \text{ pour tout } n > 0}$.
4. **Traduction de $C = \bigcap_{n\geq 1} C_n$.** « Quel que soit le rang à partir duquel on se place, on obtient encore au moins une fois l'as après ce rang. » (Autrement dit : « on obtient l'as une infinité de fois » ; il n'y a pas de dernier lancer donnant un as.)
5. **Écriture de B_n et B.**
   (a) B_n : « À partir du n-ième lancer, on n'a plus que des as. »

$$\boxed{B_n = \bigcap_{k\geq n} A_k}$$

   (b) B : « À partir d'un certain lancer, on n'a plus que des as. »

$$\boxed{B = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k}$$

Exercice 82

On lance une pièce biaisée avec $\mathbb{P}(\text{pile}) = p \in]0,1[$ et $\mathbb{P}(\text{face}) = 1-p$. Pour $k \geq 1$, notons F_k : « le k-ième lancer donne face » et S_k : « le premier pile est obtenu au lancer k ».

1. (a)

$$\boxed{E_1 = \bigcup_{k=6}^{\infty} S_k}, \qquad \boxed{E_2 = \bigcap_{k=1}^{5} F_k = \overline{\bigcup_{k=1}^{5} S_k}}.$$

   (b) Comme $\mathbb{P}(S_k) = (1-p)^{k-1}p$ et $\mathbb{P}(F_k) = 1-p$,

$$\mathbb{P}(E_2) = \prod_{k=1}^{5} \mathbb{P}(F_k) = (1-p)^5.$$

   De plus,

$$\mathbb{P}(E_1) = \sum_{k=6}^{\infty} \mathbb{P}(S_k) = \sum_{k=6}^{\infty} (1-p)^{k-1}p = (1-p)^5 \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m p = (1-p)^5.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = (1-p)^5} \quad \text{et donc} \quad \boxed{E_1 = E_2}.$$

2. On dispose des urnes $\mathscr{U}_n$: $\mathscr{U}_n$ contient n boules dont une blanche. Si S_k se réalise, on tire dans $\mathscr{U}_k$, donc $\mathbb{P}(B \mid S_k) = \dfrac{1}{k}$. Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \mid S_k)\,\mathbb{P}(S_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(1-p)^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-p)^{k-1}}{k}.$$

   Pour $r \in (0,1)$, on a l'identité (issue de la somme géométrique et d'un changement d'indice) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{k-1}}{k} = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (rt)^{k-1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1-rt}\,dt = -\frac{1}{r}\ln(1-r).$$

   Avec $r = 1-p$, il vient

$$\mathbb{P}(B) = p \cdot \left(-\frac{1}{1-p}\ln\big(1-(1-p)\big)\right) = -\frac{p}{1-p}\ln p.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = -\frac{p\ln p}{1-p}} \qquad \big(\text{valable pour } p \in]0,1[\big).$$