**Programme de colles**
**Semaine 11 du 8/12 au 12/12/2025**

**Séries de réels**

- Définition, notation $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ ou $\sum u_n$. Sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.
- Convergence d'une série, somme d'une série convergente, notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
- Combinaison linéaire de séries convergentes.
- Théorème de comparaison pour des séries à termes positifs.
- Théorème d'équivalence pour des séries à termes positifs.
- Convergence absolue : définition, elle entraîne la convergence.
- Convergence et somme des séries géométriques, et dérivées première et seconde :
$$\sum_{n \geqslant 0} q^n \qquad \sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1} \qquad \sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$$
où la raison $q$ est telle que $|q| < 1$.
- Convergence et somme de la série exponentielle ($x \in \mathbf{R}$) : $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$
- Divergence de la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ et convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

**Probabilités**

- Expérience aléatoire, univers $\Omega$, événements, événement certain, événement impossible
- Notion de tribu $\mathcal{T}$ sur $\Omega$ (aucune question sur les tribus ne doit être posée)
- Événements incompatibles, système complet d'événements
- Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$
- Propriétés d'une probabilité :
$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$, $A \subset B \implies \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$
- Pour des événements $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 2 à 2 incompatibles, $\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ converge et $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$
- Probabilité conditionnelle sachant $A$, notation $\mathbf{P}_A(B)$ ou $\mathbf{P}(B \mid A)$. $\mathbf{P}_A$ est une probabilité
- Formule des probabilités composées (conditionnements successifs)
- Système quasi-complet d'événements
- Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un système quasi-complet d'événements, alors la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_n \cap B)$ est convergente et $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n \cap B)$.
Si de plus pour tout $n$, $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}_{A_n}(B)$.
- Formule de Bayes
- Indépendance de 2 événements, indépendance mutuelle de $n$ événements, d'une suite d'événements

**Questions de cours :**

1. Définir : "la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge ", et définir alors la somme de cette série.
2. Que dire du comportement asymptotique de $(u_n)$ lorsque $\sum u_n$ converge ?
Que dire de $\sum u_n$ lorsque $(u_n)$ ne converge pas vers 0 ?
3. Théorème de comparaison pour des séries à termes positifs.

4. Théorème d'équivalence pour des séries à termes positifs.
5. Définition de la convergence absolue, critère de convergence et inégalité sur les sommes.
6. Définition et critère de convergence d'une série télescopique.
7. Définition et critère de convergence d'une série géométrique, et dérivées première et seconde.
8. Définition et critère de convergence d'une série exponentielle.
9. Nature des séries $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.
10. Définition d'une probabilité sur un univers $\Omega$
11. Définition d'une probabilité conditionnelle
12. Définition de l'indépendance mutuelle de $n$ événements
13. Formule des probabilités composées
14. Formule des probabilités totales
15. Formule de Bayes