TD 9 : théorie basique des probabilités

Exercice 83

On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ une valeur propre de M et $U \in \mathbf{K}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, c'est-à-dire $MU = \lambda U$.

1. **Expression de $M^k U$.** On montre par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que

$$\boxed{M^k U = \lambda^k\, U}.$$

<u>Initialisation</u> : $k = 0$. On a $M^0 U = I_n U = U = \lambda^0 U$. <u>Hérédité</u> : si $M^k U = \lambda^k U$, alors

$$M^{k+1}U = M(M^k U) = M(\lambda^k U) = \lambda^k MU = \lambda^k(\lambda U) = \lambda^{k+1}U.$$

La propriété est vraie pour tout $k \in \mathbf{N}$.

2. Soit $Q = \sum_{k=0}^{m} q_k X^k \in \mathbf{K}[X]$, et $Q(M) = \sum_{k=0}^{m} q_k M^k$.

   (a) En utilisant le point 1,

$$Q(M)U = \sum_{k=0}^{m} q_k\, M^k U = \sum_{k=0}^{m} q_k\, \lambda^k\, U = \left(\sum_{k=0}^{m} q_k \lambda^k\right) U = \boxed{Q(\lambda)\, U}.$$

   (b) Si $Q(M) = 0_n$, alors pour tout vecteur propre $U \neq 0$ associé à λ,

$$0 = Q(M)U = \boxed{Q(\lambda)\, U}.$$

   Comme $U \neq 0$, on obtient $\boxed{Q(\lambda) = 0}$: la valeur propre λ est racine du polynôme Q.

Exercice 84

On suit la marche à suivre. Pour chaque matrice A, on devine une valeur propre, puis on résout $(A - \lambda I)X = 0$ pour décrire $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$, le sous-espace propre de A associé à λ. On conclut à la diagonalisabilité et, le cas échéant, on donne P tel que $P^{-1}AP = D$.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Sommes de lignes constantes $= 2$ donc $\lambda = 2$ est valeur propre, vecteur propre $(1,1)^\top$.
La trace vaut $3 \Rightarrow$, on devine que la seconde valeur propre est 1.

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 2x - y = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Ker}(A - I_2) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\},\;\; A \text{ diagonalisable},\;\; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\;\; D = \mathrm{diag}(1, 2).}$$

2. $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

   Sommes de lignes constantes $= -2$ donc $\lambda = -2$ est valeur propre, vecteur propre $(1,1)^\top$.
   La trace vaut -1 donc l'autre valeur propre est 1.

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -6x + 3y = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Ker}(A - I_2) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 1\},\ A \text{ diagonalisable},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \mathrm{diag}(-2, 1).}$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (triangulaire supérieure).

   Lecture directe : $\mathrm{Sp}(A) = \{2, -1, 1\}$. Sous-espaces propres :

$$\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(1,0,0), \quad \mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{Vect}(1,-1,0), \quad \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(1,-1,1).$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{2, -1, 1\},\ A \text{ diagonalisable},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \mathrm{diag}(2, -1, 1).}$$

4. $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

   Tests ± 1 :
   $(A - I)(1,1,0)^\top = 0 \Rightarrow \lambda = 1$.
   $(A + I)(1,0,1)^\top = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.
   La trace vaut -3 donc on devine que la troisième valeur propre vaut -3 (et $(A+3I)(-1,-1,1)^\top = 0$).

$$\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(1,1,0), \quad \mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{Vect}(1,0,1), \quad \mathrm{Ker}(A + 3I_3) = \mathrm{Vect}(-1,-1,1).$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, -1, -3\},\ A \text{ diagonalisable},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \mathrm{diag}(1, -1, -3).}$$

5. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

   Objectif : mettre en évidence, par pivots sur $A - \lambda I_3$ (sans déterminant), les valeurs de λ pour lesquelles $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$.

   Étape 1 — Écriture de $A - \lambda I_3$.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ -3 & 9 & 8-\lambda \end{pmatrix}.$$

   Étape 2 — Élimination de la première colonne sans division. Remplaçons la troisième ligne par

$$L_3 \leftarrow (1-\lambda)L_3 + 3L_1.$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 0 & 9(2-\lambda) & 14-9\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Étape 3 — Annulation de l'« entrée pivot » en colonne 2, toujours sans division. Posons

$$L_3 \leftarrow (-2-\lambda)\, L_3 - 9(2-\lambda)\, L_2.$$

Alors la colonne 2 de L_3 devient nulle, et la colonne 3 devient

$$(-2-\lambda)\big(14-9\lambda+\lambda^2\big) - 9(2-\lambda)(-2) = -\big(\lambda^3-7\lambda^2+14\lambda-8\big) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

Ainsi une forme échelonnée (sans divisions) est

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) \end{pmatrix}.$$

Conclusion. Le rang de $A-\lambda I_3$ est strictement inférieur à 3 si et seulement si $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1,2,4\}}.$$

Sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_3)$ **et diagonalisabilité.**

- $\lambda = 1$: $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$. Des équations $3y+2z=0$, $-3x+9y+7z=0$ on tire $(x,y,z) = (t,-2t,3t)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A-I_3) = \mathrm{Vect}(1,-2,3)}.$$

- $\lambda = 2$: $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$. Des équations $-4y-2z=0$, $-x+3y+2z=0$ on tire $(x,y,z) = (s,-s,2s)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A-2I_3) = \mathrm{Vect}(1,-1,2)}.$$

- $\lambda = 4$: $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -2 \\ -3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Des équations $-6y-2z=0$, $-3x+3y+2z=0$ on tire $(x,y,z) = (-u,u,-3u)$, donc $(x,y,z) = (u,-u,3u)$ après changement de signe.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A-4I_3) = \mathrm{Vect}(1,-1,3)}.$$

Les trois valeurs propres sont distinctes et l'on a trois sous-espaces propres de dimension 1 en somme directe : A est diagonalisable. En prenant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(colonnes = vecteurs propres pour } 1,2,4\text{)}, \qquad D = \mathrm{diag}(1,2,4),$$

on a

$$\boxed{P^{-1}AP = D}.$$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

La somme de chaque colonne vaut -1, ce qui permettait de deviner que -1 est valeur propre (via $A^\top$).
Pour $\lambda = -1$, on constate que $\mathrm{rg}(A + I_3) = 1 < 3$, donc on résout $(A + I_3)X = 0$:

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}(A + I_3) = \mathrm{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

À l'aide de la trace, on devine que 1 est la dernière valeur propre et par résolution d'un système on trouve : $(A - I_3)(-1, -1, 2)^\top = 0$

Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, -1, -1\},\ A \text{ diagonalisable},\ P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \mathrm{diag}(1, -1, -1).}$$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Valeur propre évidente grâce à la 3^e colonne : $AE_3 = 1 \cdot E_3$, donc $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(0, 0, 1)$.
Recherche de λ tel que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3)$ diminue.
En observant le bloc 2 x 2 en haut à gauche on remarque que,

$$\mathrm{rg}(A - 2I) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Par résolution d'un système : $\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(1, -1, 2)$
Le calcul de la trace semble indiquer que la dernière valeur propre serait aussi 2, ce qui impose alors que A ne serait pas diagonalisable, puisque la dimension des deux sous espaces-propres trouvés a une somme de 2 et non 3.
Cependant, cet argument de trace n'est pas admissible avec le programme de BCPST, il convient donc de procéder avec des calculs de pivots.

Objectif : exhiber, par des pivots sur $A - \lambda I_3$ (sans déterminant), les λ pour lesquels $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$.

Étape 1 — Écriture de $A - \lambda I_3$.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Étape 2 — Annulation de la première colonne sans division. Posons

$$L_2 \leftarrow (1-\lambda)\, L_2 - L_1, \qquad L_3 \leftarrow (1-\lambda)\, L_3 + L_1.$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 & 0 \\ 0 & 3\lambda - 4 & (1-\lambda)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 0 & 3\lambda - 4 & (1-\lambda)^2 \end{pmatrix}.$$

Étape 3 — Annulation de l'entrée $(3, 2)$ sans division. Posons

$$L_3 \leftarrow (\lambda - 2)^2 \, L_3 - (3\lambda - 4) \, L_2.$$

Alors la 2$^{\text{e}}$ composante de L_3 devient nulle, et la composante $(3, 3)$ vaut

$$(\lambda - 2)^2 (1 - \lambda)^2.$$

On a donc une forme échelonnée (au sens du rang) :

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion sur le rang. Le rang de $A - \lambda I_3$ est strictement inférieur à 3 si et seulement si

$$(\lambda - 2)^2 (1 - \lambda)^2 = 0 \iff \lambda \in \{1, 2\}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, 2\}}.$$

Sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$ **et diagonalisabilité.**
• Pour $\lambda = 1$,

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; y = 0, \; x = 0, \; z \text{ libre.}$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(0, 0, 1)} \quad (\dim = 1).$$

• Pour $\lambda = 2$,

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; x = -y, \; z = -2y.$$

On peut prendre $y = 1$, d'où un générateur $(-1, 1, -2)$, équivalent à $(1, -1, 2)$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(1, -1, 2)} \quad (\dim = 1).$$

Comme $\dim \mathrm{Ker}(A - I_3) = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = 1$, on ne peut extraire que 2 vecteurs propres indépendants au total.

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable } (\dim \mathrm{Ker}(A - I_3) + \dim \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = 2 < 3).}$$

Exercice 85

On travaille dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. **Calcul de $M^2 - 3M + 2I_3$.**

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$M^2 - 3M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I_3,$$

et par suite

$$\boxed{M^2 - 3M + 2I_3 = 0_3}.$$

2. **Valeurs propres et sous-espaces propres.**
L'égalité précédente montre que M est annulée par le polynôme $P(X) = (X-1)(X-2)$. Par le lien polynôme annulateur / spectre, on en déduit

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) \subset \{1, 2\}}.$$

Cherchons les sous-espaces propres (et vérifions que 1 et 2 sont bien valeurs propres).

▷ Pour $\lambda = 1$,

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système $(M - I_3)X = 0$ donne $z = 0$ et $x + y = 0$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Ker}(M - I_3) = \mathrm{Vect}\big((1, -1, 0)\big)} \quad (\dim = 1).$$

▷ Pour $\lambda = 2$,

$$M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système $(M - 2I_3)X = 0$ impose $z = x$ et ne contraint pas y. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Ker}(M - 2I_3) = \mathrm{Vect}\big((1, 0, 1), (0, 1, 0)\big)} \quad (\dim = 2).$$

Comme les deux noyaux sont non triviaux, on a bien

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2\}}.$$

3. **Diagonalisabilité.**
La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $1 + 2 = 3$ (dimension totale). Donc M est diagonalisable. En prenant comme colonnes de P une base de vecteurs propres, par exemple

$$P = \big[\ (1, -1, 0) \quad (1, 0, 1) \quad (0, 1, 0)\ \big] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{diag}(1, 2, 2),$$

on obtient

$$\boxed{P^{-1}MP = D}.$$

Exercice 86

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \qquad X_{n+1} = A\,X_n, \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. **Mise sous forme matricielle.**

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad X_{n+1} = A\,X_n}$$

2. **Diagonalisation de A.**
On teste d'abord $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ en résolvant $(A - \lambda I_3)X = 0$.
▷ $\lambda = 1$. On obtient :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Vect}\big((1,1,0)\big)}$$

▷ $\lambda = -1$. On obtient :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A + I_3) = \operatorname{Vect}\big((1,0,1)\big)}$$

▷ La trace vaut $\operatorname{tr}(A) = -5 + 5 - 3 = -3$. Comme la somme des valeurs propres vaut la trace, la troisième valeur propre vérifie $1 + (-1) + \lambda_3 = -3$, donc on devine que -3 est valeur propre. On le vérifie avec un système à résoudre et :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A + 3I_3) = \operatorname{Vect}\big((-1,-1,1)\big)}$$

Ainsi

$$\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \{\,1,\ -1,\ -3\,\}}.$$

Les trois sous-espaces propres sont de dimension 1 et engendrent $\mathbb{R}^3$, donc A est diagonalisable. En choisissant pour colonnes des vecteurs propres associés (dans l'ordre $1, -1, -3$),

$$P = \big[(1,1,0)\ \ (1,0,1)\ \ (-1,-1,1)\big] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \operatorname{diag}(1,-1,-3),$$

on a

$$\boxed{P^{-1}AP = D}.$$

Une inversion par pivots donne

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

3. **Calcul de A^n.** Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1} \quad \text{avec} \quad D^n = \operatorname{diag}\big(1,\ (-1)^n,\ (-3)^n\big).$$

En posant $b = (-1)^n$ et $c = (-3)^n$, un calcul matriciel donne

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} b+c-1 & 2-b-c & 1-c \\ c-1 & 2-c & 1-c \\ b-c & c-b & c \end{pmatrix}}.$$

4. **Formules explicites pour u_n, v_n, w_n.** On a $X_n = A^n X_0$ avec $X_0 = (1,1,2)^\top$.
En utilisant la matrice ci-dessus (ou la décomposition sur la base propre),

$$\boxed{u_n = 3 - 2(-3)^n, \qquad v_n = 3 - 2(-3)^n, \qquad w_n = 2(-3)^n \quad (n \in \mathbb{N})}.$$

Exercice 87

On travaille dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -3 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. **Diagonalisation de A.**

   <u>Recherche des valeurs propres par réduction de rang (sans déterminant).</u> On considère

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ -3 & 9 & 8-\lambda \end{pmatrix}.$$

   En effectuant des opérations de lignes (sans division) :

$$L_3 \leftarrow (1-\lambda)L_3 + 3L_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 0 & 9(2-\lambda) & 14 - 9\lambda + \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

   Puis

$$L_3 \leftarrow (-2-\lambda)L_3 - 9(2-\lambda)L_2,$$

   ce qui donne une forme échelonnée dont l'entrée $(3,3)$ vaut

$$-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

   Donc $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$ si et seulement si $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, 4\}}.$$

   <u>Sous-espaces propres.</u> On résout $(A - \lambda I_3)X = 0$ pour chaque λ.

   - $\lambda = 1$: $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ donne $3y + 2z = 0$ et $-3x + 9y + 7z = 0$, d'où $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(1, -2, 3)$.
   - $\lambda = 2$: $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ donne $-4y - 2z = 0$ et $-x + 3y + 2z = 0$, d'où $\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(1, -1, 2)$.
   - $\lambda = 4$: $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -2 \\ -3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ donne $-6y - 2z = 0$ et $-3x + 3y + 2z = 0$, d'où $\mathrm{Ker}(A - 4I_3) = \mathrm{Vect}(1, -1, 3)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(1,-2,3), \quad \mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}(1,-1,2), \quad \mathrm{Ker}(A - 4I_3) = \mathrm{Vect}(1,-1,3).}$$

   Comme la somme des dimensions vaut 3, A est diagonalisable. En posant (dans l'ordre $1, 2, 4$)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{diag}(1, 2, 4),$$

   on a

$$\boxed{A = PDP^{-1}}.$$

2. **Système différentiel $X' = AX$ et changement de variables.**
   On pose
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$
   Alors
$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = DY,$$
   soit le système découplé
$$\boxed{u' = u, \qquad v' = 2v, \qquad w' = 4w}.$$
   Donc, pour des constantes réelles C_1, C_2, C_3,
$$u(t) = C_1 e^t, \qquad v(t) = C_2 e^{2t}, \qquad w(t) = C_3 e^{4t}.$$
   En revenant à $X = PY$,
$$X(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
   Autrement dit,
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{4t}, \\ y(t) &= -2C_1 e^t - C_2 e^{2t} - C_3 e^{4t}, \\ z(t) &= 3C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{4t}. \end{aligned}}$$

Exercice 88

On note a_n, b_n, c_n les probabilités d'être, au jour n, dans A, B, C, et
$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. **Matrice de transition.**
   • Depuis A : le Loup va en B avec probabilité 1.
   • Depuis B : il ne reste pas en B, et $\mathbb{P}(A \mid B) = 2\,\mathbb{P}(C \mid B)$ avec somme 1, d'où $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(C \mid B) = \frac{1}{3}$.
   • Depuis C : il ne reste pas en C, et $\mathbb{P}(A \mid C) = 2\,\mathbb{P}(B \mid C)$, d'où $\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(B \mid C) = \frac{1}{3}$.
   Avec $X_{n+1} = M\,X_n$ (vecteur-colonne), les colonnes de M sont les lois de transition depuis A, B, C :
$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_{n+1} = M\,X_n.}$$

2. **Valeurs propres et sous-espaces propres par pivots sur $(M - \lambda I_3)X = 0$.**
   On écrit
$$M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -\lambda & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\lambda \end{pmatrix}.$$
   Réduction (sans divisions) pour λ tel que $\lambda \neq 0$ et $\lambda^2 \neq \frac{2}{3}$.
$$L_2 \leftarrow \lambda\,L_2 + L_1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} - \lambda^2 & \frac{\lambda+2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Posons $S = 3L_3 = (0, 1, -3\lambda)$, puis

$$L_3 \leftarrow \left(\tfrac{2}{3} - \lambda^2\right) S - L_2 \quad \rightsquigarrow \quad L_3 = (0, 0, \tfrac{1}{3}(9\lambda^3 - 7\lambda - 2)).$$

Ainsi, pour ces λ, on a rang < 3 si et seulement si $9\lambda^3 - 7\lambda - 2 = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{(\lambda - 1)\Big(\lambda + \tfrac{1}{3}\Big)\Big(\lambda + \tfrac{2}{3}\Big) = 0}.$$

Les cas particuliers $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 = \frac{2}{3}$ se traitent directement et donnent rang 3 (systèmes de Cramer), donc ne fournissent pas de valeur propre supplémentaire.
On résout maintenant $(M - \lambda I_3)X = 0$ pour chaque racine.

▷ $\lambda = 1$.

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

La troisième équation donne $b = 3c$, puis la seconde donne $a + \frac{1}{3}(b + c) = 0 \Rightarrow a = \frac{8}{3}c$. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Ker}(M - I_3) = \mathrm{Vect}\big((8, 9, 3)\big)}.$$

▷ $\lambda = -\frac{1}{3}$.

$$M + \tfrac{1}{3}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La troisième équation donne $b = -c$, la seconde impose $a = 0$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}\Big(M + \tfrac{1}{3}I_3\Big) = \mathrm{Vect}\big((0, 1, -1)\big)}.$$

▷ $\lambda = -\frac{2}{3}$.

$$M + \tfrac{2}{3}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

La troisième équation donne $b = -2c$, puis la seconde impose $a = c$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}\Big(M + \tfrac{2}{3}I_3\Big) = \mathrm{Vect}\big((1, -2, 1)\big)}.$$

En résumé,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \Big\{1,\ -\tfrac{1}{3},\ -\tfrac{2}{3}\Big\}}, \qquad \text{et les sous-espaces propres sont ceux ci-dessus.}$$

3. **Diagonalisabilité et forme de $M^n X_0$.**
Les trois valeurs propres sont distinctes, donc M est diagonalisable. Si $b = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de vecteurs propres de M associée à $1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$, et si $X_0 = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$, alors

$$\boxed{M^n X_0 = \alpha_1 V_1 + \alpha_2\big(-\tfrac{1}{3}\big)^n V_2 + \alpha_3\big(-\tfrac{2}{3}\big)^n V_3.}$$

4. **Limite de X_n.**
Des questions précédentes, on dispose d'une base de vecteurs propres (V_1, V_2, V_3) associée aux valeurs propres $1,\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}$, et d'une décomposition

$$X_n = \alpha_1 V_1 + \alpha_2\big(-\tfrac{1}{3}\big)^n V_2 + \alpha_3\big(-\tfrac{2}{3}\big)^n V_3.$$

Invariance de la somme des coordonnées.
Les colonnes de M somment à 1, donc pour tout vecteur colonne $X = (x_1\ x_2\ x_3)^\top$, la somme des coordonnées de MX est la même que celle de X.
Il s'ensuit que $a_n+b_n+c_n$ est constant en n, et comme c'est une probabilité totale : $\forall n,\ a_n+b_n+c_n = 1$

Conséquence pour les vecteurs propres non associés à 1.
Si V est un vecteur propre tel que $MV = \lambda V$ avec $\lambda \neq 1$, alors la somme des coordonnées de V, notée $\Sigma(V)$, vérifie

$$\Sigma(V) = \Sigma(MV) = \Sigma(\lambda V) = \lambda\, \Sigma(V).$$

Donc $(1-\lambda)\Sigma(V) = 0$ et, puisque $\lambda \neq 1$, alors $\Sigma(V) = 0$.
Ainsi, les coordonnées de V_2 et V_3 somment à 0, tandis que $\Sigma(V_1) \neq 0$ (par exemple, avec $V_1 = (8, 9, 3)$, alors $\Sigma(V_1) = 20$).

Passage à la limite.
Comme $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ et $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$,

$$\big(-\tfrac{1}{3}\big)^n V_2 \text{ tend vers } 0 \quad \text{et} \quad \big(-\tfrac{2}{3}\big)^n V_3 \text{ tend vers } 0 \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Donc X_n converge vers $\alpha_1 V_1$.
Or la somme des coordonnées est conservée et vaut toujours 1, d'où, à la limite,

$$1 = \Sigma(X_n) \text{ tend vers } \Sigma(\alpha_1 V_1) = \alpha_1\, \Sigma(V_1) = \alpha_1 \cdot 20,$$

ce qui impose $\alpha_1 = \dfrac{1}{20}$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = \frac{1}{20}(8, 9, 3) = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{20}, \frac{3}{20}\right).$$

$$\boxed{\lim a_n = \frac{2}{5}, \quad \lim b_n = \frac{9}{20}, \quad \lim c_n = \frac{3}{20}}$$

L'alpage le plus sûr est donc C (probabilité limite la plus faible $\frac{3}{20}$).