# CH7 – Espaces vectoriels

## Plan du chapitre



## Liste des définitions

## Liste des techniques de base



### Grille d'analyse des exercices

| **Exercice** | Question | T | Référence(s) | Commentaires/remarques |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

1. **$T_0$** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

**Prérequis :** savoir résoudre un système linéaire.

# 1 Espaces vectoriels à connaître

*Tous les ensembles que vous connaissez équipés de la notion de combinaison linéaire (notion centrale de l'algèbre linéaire) sont des espaces vectoriels.*

- **Espaces numériques :** $\mathbf{K}^p$ (qui n'a pas de base si $p=0$). Si $p \geq 1$, une base en est la base canonique $\mathscr{B}_c = \left(\mathbf{e_1},\dots,\mathbf{e_p}\right)$ où $\mathbf{e_j} = (0,\dots,0,\underset{j-\text{ème}}{\underset{\uparrow}{1}},0\dots,0)$. Coordonnées de $\mathbf{x} = \left(x_!,\dots,x_p\right)$ sur $\mathscr{B}_c$ : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$
- **Polynômes :** $\mathbf{K}_n[\mathbf{X}]$ est de dimension finie, $\dim \mathbf{K}_n[\mathbf{X}] = n+1$. Une base en est la base canonique $\mathscr{B}_c$ **dans cet ordre** : $\mathscr{B}_c = \left(\mathbf{1}, X, X^2, \dots, X^n\right)$. Coordonnées de $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ sur $\mathscr{B}_c$ : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- $\mathbf{K}[\mathbf{X}]$ est de dimension infinie de base $\mathscr{B} = (\mathbf{1}, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$.
- **Matrices :** $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de dimension finie $np$. Il admet une base canonique notée $\mathscr{B}_c$ qui est par exemple pour $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ **dans cet ordre** :

  $\mathscr{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Coordonnées de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{B}_c$ : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(A) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$
- **Fonctions :** L'ensemble $\mathscr{F}(I, \mathbf{K})$ (noté aussi $\mathbf{K}^I$) des fonctions définies sur un intervalle $I$, et à valeurs dans $\mathbf{K}$, est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. On n'en connaît pas de base.
- Soit $a, b$ deux réels fixés. L'ensemble des solutions sur un intervalle $I$ de l'EDL$_2$ homogène :

  $$y" + ay' + by = \mathbf{0}$$

  est un espace vectoriel de dimension 2 (on résout et on met sous forme de Vect pour voir que c'est un e.v.).
- **Suites :** Soit $a, b$ deux réels et $p \in \mathbf{N}$ fixés. L'ensemble des suites $(u_n)$ vérifiant :

  $$\forall n \geq p \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$

  est un espace vectoriel de dimension 2 (on résout et on met sous forme de Vect pour voir que c'est un e.v.).

---

**T₁** **C'est quoi un vecteur ?**

C'est la question essentielle à se poser **avant de résoudre tout exercice** d'algèbre linéaire.

1. Réponse : ce sont les éléments de l'espace vectoriel $E$ de travail.
2. Il est essentiel de contrôler **avant** de répondre :
   - **a)** qu'on a bien identifié **l'ensemble** $E$ (car ev = ensemble)
   - **b)** qu'on sait si $E$ est un ensemble pareq ou param.
   - **c)** C'est par ce travail qu'on connaît le type d'objet qu'est un vecteur.

---

## $T_2$ Ensemble `pareq` ou `param` ?

Un ensemble non défini en extension est toujours défini : soit par (in)-équations [`pareq`], soit paramétriquement [`param`].

1. [`pareq`] : la (les) variables descriptives se trouve(nt) en **début** d'ensemble :

$$E = \{x \in D \quad \dots\}$$

   — Les variables descriptives ne sont **jamais quantifiées**.

   — Les [...] referment des équations/inéquations vérifiées par $x$.

   — Remarque utile : pour les ensembles $E$ `pareq` : $E \subset D$.

2. **[`param`]** : la (les) variables descriptives s'appellent dans ce cas *paramètres* ou *variables libres*. Elles se trouve(nt) en **fin** d'ensemble :

$$E = \{\dots \quad x \in D\}.$$

   — La (les) variables descriptives ne sont **jamais quantfiées**.

   — Les [...] font intervernir une expression dépendant de la (des) variables(s) descriptive(s).

   — Il faut examniner l'expression [...] les variables pour identifier de quel ensemble l'ensemble $E$ est un sous-ensemble : on n'a pas forcément $E \subset D$ !

3. En dehors de ces deux représentations, toute description de l'ensemble $E$ **mal formée**, donc non utilisable.

## $T_3$ Égalité de vecteurs

Suivant le contexte, une égalité de vecteurs donne de nombreuses informations utiles :

1. Égalité de fonctions : elles prennent partout les mêmes valeurs (et ont donc même domaine de définition), cela entraîne aussi l'égalité de leurs fonctions dérivées etc.
2. Égalité de polynômes : en plus du point précédent, l'égalité entraîne : égalité des degrés, des coefficients, des racines et de leurs multiplicités.
3. Égalité de $p$-listes : égalités des composantes.
4. Égalité de matrices : égalités de leurs coefficients.

### $T_4$ Comment dessiner des vecteurs d'un ev $E$ ?

1. La feuille représente (une région de ) $E$.
2. On commence par placer le vecteur nul 0 : un point quelconque sur la feuille.
3. Tout vecteur non nul $\mathbf{u}$ se représente par une flèche partant de $\mathbf{0}$ (toujours !).
4. Si $\lambda$ est un scalaire, le vecteur $\lambda\mathbf{u}$ se dessine par homothétie de rapport $\lambda$ agissant sur $\mathbf{u}$.
5. $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ se dessine avec la règle du parallélogramme.
6. Dans le contexte des combinaisons linéaires, on ne sait pas distinguer les angles, ou les longueurs des vecteurs. Il n'est pas nécessaire de placer des angles droits ou de considérer des normes : il faudrait une structure de produit scalaire sur $E$ pour cela.

**■ Exercice 1.**

Dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0(\mathbf{R})$, on considère les fonctions $f_1 : x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right)$, $f_1 : x \mapsto \cos(x)$, $f_3 : x \mapsto \sin(x)$.

1. Exprimer $f_1$ comme combinaison linéaire de $f_2$ et $f_3$.
2. Représenter géométriquement la situation.

**■ Exercice 2.**

Dans $\mathbf{R}[\mathbf{X}]$, on considère trois polynômes tels $P_0$, $P_1$ $P_2$ tels que $P_j$ est de degré $j$ et tels que $P_2 = XP_1 - 3P_0$.

1. Est-ce que $P_2$ est combinaison linéaire de $P_0$ et $P_1$ ? Justifier
2. Représenter géométriquement la situation.

## 2 Sous-espace vectoriel

**■ Définition 1** ........................................... [Sous-espace vectoriel de $E$]

Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit $F$ un ensemble, $F$ est un s-e.v. de $E$ si :

1. $F \subset E$.
2. $\mathbf{0} \in F$.
3. $\forall (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \mathbf{x}+\lambda\mathbf{y} \in F$.

**T5** **Montrer qu'un ensemble $F$ est un ev**

Il faut d'abord utiliser **T2** pour savoir ce qu'est un vecteur. Ceci permet lorque l'énoncé ne le précise pas de trouver de quel espace vectoriel $E$ des espaces à connaître l'ensemble $F$ est un sous-espace.

1. Si $E = \mathbf{K}^n$, en général, $F$ est défini :
   - **a)** soit par un système d'équations linéaires homogènes. Dans ce cas on l'identifie comme tel, et ceci prouve que c'est un sev de $\mathbf{K}^n$.
   - **b)** Soit sous forme paramétrique. Dans ce cas, en séparant les paramètres intervenant dans la description de $F$, on met en évidence sa structure de Vect.
2. Sinon, avec **T1**, on examine si $F$ est un ensemble `param` ou `pareq` :
   - **a)** `[Param]` la séparation des variables descriptives *scalaires* dans la définition de $F$ met en évidence la structure de Vect.
   - **b)** `[Pareq]` ou dans les cas moins clairs, on revient à la définition.

**■ Exemple 1.**
On montre par la définition que l'ensemble $Z$ des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $P(0) = P'(0) = 0$ est un s-e.v. de $\mathbf{R}[X]$.

**■ Remarque 1.**

Dans tout e.v. $E$, les ensembles $E$ et $\{\mathbf{0}\}$ sont des s-e.v. de $E$ appelés sous-espaces triviaux de $E$.

**■ Théorème 1** ............................................. [*Stabilité de la notion par intersection*]
L'intersection de s-e.v. d'un e.v. $E$ est encore un s-e.v. de $E$. C'est en général faux pour la réunion.

## 3 s-e.v. engendré. Vect

**■ Définition 2** ..................................................... [Combinaison linéaire (CL)]
Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $p \geq 1$ un entier, et $\mathscr{F} = \left(\mathbf{u_1} \dots \mathbf{u_p}\right)$ une famille de $p$ vecteurs de $E$ On appelle combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{F}$ tout vecteur de la forme :

$$\mathbf{S} = \lambda_1 \mathbf{u_1} + \lambda_2 \mathbf{u_2} + \cdots + \lambda_p \mathbf{u_p} \quad (\star) \quad \text{où} \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad \lambda_i \in \mathbf{K}.$$

**■ Définition 3** ............................................................... [Coeffs. d'une CL]
Dans $(\star)$, les scalaires $\lambda_i$ s'appellent les **coefficients** de la combinaison linéaire.

**■ Définition 4** ......................................................... [CL triviale ; CL nulle]
La combinaison linéaire $(\star)$ est dite **triviale** si tous ses coefficients sont nuls. La combinaison linéaire est dite **nulle** si $\mathbf{S} = \mathbf{0}$.

**■ Théorème 2** ................................... [*s-e.v. engendré par une famille finie de vecteurs*]
Si $\mathscr{F} = \left(\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_p}\right)$ est une famille de $p$ vecteurs d'un e.v. $E$, alors l'ensemble de tous les vecteurs de la forme $(\star)$ quand les $\lambda_i$ varient dans $\mathbf{K}$ constitue un s-e.v. de $E$, appelé s-e.v. engendré par $\mathscr{F}$ et se note Vect$(\mathscr{F})$.

**■ Remarque 2.**

1. On retient que **tout Vect est un s-e.v.**.

2. Dès qu'un sous-ensemble $F$ d'un e.v. connu $E$ est défini **paramétriquement**, en essayant de séparer les paramètres, on met en évidence la structure de Vect de $F$ ce qui prouve que c'est un s-e.v. de $E$.

### ■ Exercice 3.

Dans $\mathbf{K}^{\square}$, soit $F = \left\{(a,b,a,2b) \quad (a,b) \in \mathbf{K}^2\right\}$. Montrer que $F$ est un espace vectoriel.

### ■ Exercice 4.

Soit $G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^{\square} \middle| \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & & & + & 2z & - & t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$ Montrer que $G$ est un espace vectoriel.

**■ Proposition 1** ........................................................ `[plus petit s-e.v.]`
Tout s-e.v. contenant $\mathscr{F}$ contient Vect($\mathscr{F}$).

---

**T6** **Prouver que Vect($\mathscr{F}$)$\subset G$, $G$ s-ev**

En deux temps :

1. On prouve que chaque vecteur de $\mathscr{F}$ est dans $G$.
2. On ajoute : $G$ étant un s-ev il contient aussi les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$.

Comme l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$ est par définition Vect($\mathscr{F}$) on a bien l'inclusion.

---

### ■ Exemple 2.

Soit $Z$ le s-e.v. de $\mathbf{R}[\mathrm{X}]$ de **Exple 1.** Si $F = \mathrm{Vect}(X^2, (1-X)X^2)$, on montre que $F \subset Z$ en remarquant que : $\mathbf{A} = X^2$ et $\mathbf{B} = (1-X)X^2$ admettent, au vu de leur forme factorisée, 0 comme racine double. Ainsi ils vérifient $P(0) = P'(0) = 0$. Ils sont donc dans $Z$.

### ■ Exercice 5.

Soit $E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \quad x - z = 0\right\}$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$, où $u = (5,0,1,0)$, $v = (1,15,1/2,1)$). Montrer que $F \subset E$.

**■ Proposition 2** ............................................... `[Règles de calcul avec Vect]`

1. $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u_2}, \mathbf{u_1})$.
2. $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p}, \mathbf{0}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p})$.
3. Si les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont non nuls : $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p}) = \mathrm{Vect}(\alpha_1\mathbf{u_1}, \alpha_2\mathbf{u_2}, \dots, \alpha_p\mathbf{u_p})$.
4. Si $\mathbf{x}$ est combinaison linéaire de $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p})$, alors :
   $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p}, \mathbf{x}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p})$
5. ☠ $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cap \mathrm{Vect}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \neq \mathrm{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z})$.

### T7 Pivot et conservation du rang

1. Éviter au maximum de choisir un pivot $p-=p(\alpha)$ dépendant d'un paramètre $\alpha$ (car si $p(\alpha)=0$, ce n'est plus un pivot !)
2. Une opération comme $L_3 \leftarrow \alpha L_3 + L_1$ **n'est pas acceptable pour un pivot** car si $\lambda = 0$, l'opération effectuée est $L_3 \leftarrow L_1$ : on a écrasé une ligne !.
3. Une opération comme $L_1 \leftarrow \alpha L_3 + L_1$ est acceptable (on pire, on n'a rien fait !)

### T8 Passer de `pareq` à `param` et *vice-versa*

1. `[Pareq]`$\rightarrow$`[Param]`. e
   - **a)** Si $E = \mathbf{K}^n$ avec sa base canonique. On résout le système d'équations dont on présente les solutions sous forme canonique. On obtient même une base de $F$ dans ce cas (voir **thm7**).
   - **b)** Si $E \neq \mathbf{K}^n$ :
     - **i)** Si les équations de $F$ sont données en coordonnées (parce que $E$ est équipé d'une base), on résout comme dans le cas **1.a)**, mais on pensera dans la conclusion à reconvertir les colonnes en vecteurs **>T1**.
     - **ii)** Sinon peut résoudre les équations dans des cas exceptionnels : EDL rentrant dans le cadre du cours pour les espaces de fonctions, recours à la théorie des polynômes dans $E = \mathbf{R}[X]$.
2. `[Param]`$\rightarrow$`[Pareq]`. On cherche les équations de compatibilité de l'équation : «Soit $\mathbf{u} \in E$. Alors $\mathbf{u} \in F$ ssi $\mathbf{u}$ est CL des vecteurs engendrant $F$» (revenir à la définition de combinaison linéaire). Si $E \neq \mathbf{K}^n$, on exprime la CL en coordonnées.

**■ Exercice 6.**

1. Mettre le sev $G$ de l'exercice 4 sous forme de Vect.
2. Trouver un système d'équations du sev $F$ de l'exercice 3.

## 4 Familles génératrices

**■ Définition 5** .............................................. [Famille génératrice d'un s-e.v.]
Soit $\mathscr{F} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ une famille de $p \geq 1$ vecteurs d'un sous-espace vectoriel $F$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $E$. On dit que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $F$ si $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

T9

**Prouver qu'une famille $\mathscr{F}$ est génératrice de $F$**

Notons $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1} \dots \mathbf{u_p})$.

1. Si on a réussi à écrire $F = \text{Vect}(\mathscr{F})$, c'est prouvé par définition de famille génératrice.
2. Sinon, il faut réussir à trouver pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $F$ des scalaires $\lambda_1 \dots \lambda_p$ tels que $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{u_1} + \dots + \lambda_p \mathbf{u_p}$, ou alors, si on connaît une famille génératrice $\mathscr{G}$ de $F$, que la relation précédente est valable pour tout vecteur de $\mathscr{G}$ : c'est essentiellement l'approche de $\mathrm{T}_4$.

Prouver qu'une famille de vecteurs est génératrice de $F$ par le point **1.** n'est en général pas simple, il faut se demander si on n'a pas d'autres moyens à disposition pour cela.

## 5 Familles libres

■ **Définition 6** ........ [Famille libre de vecteurs d'un s-e.v.]

Une famille finie de $p$ vecteurs $(\mathbf{u_1}, \dots \mathbf{u_p})$ d'un e.v. $E$ est **libre** si la seule CL nulle de ses vecteurs ne s'obtient que par la CL triviale, c-à-d : $\forall \lambda_1 \in \mathbf{K}, \dots, \forall \lambda_p \in \mathbf{K}$

$$\underbrace{\left[\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathbf{u_j} = \mathbf{0}\right]}_{\text{CL nulle}} \Rightarrow \underbrace{[\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0]}_{\text{CL triviale}}$$

■ **Définition 7** ........ [Famille liée]

Une famille non libre est dite **liée**.

■ **Proposition 3** ........ [Propriétés des familles libres]

Soit $\mathscr{F}$ une famille **libre** de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $E$.

1. Toute sous-famille de $\mathscr{F}$ est libre.
2. Tout élément de Vect($\mathscr{F}$) est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$, et ce, de façon **unique**.

■ **Théorème 3** ........ [*Familles de polynômes (utile)*]

Les familles de polynômes **non nuls** à degré deux à deux distincts sont libres.

■ **Proposition 4** ........ [Liberté des petites familles]

1. Toute famille contenant $\mathbf{0}$ est liée.
2. Une famille d'*un seul* vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
3. *Deux* vecteurs donnés sont liés si et seulement si ils sont proportionnels (c-à-d l'un est multiple de l'autre), ou colinéaires.
4. ☠ Une famille de *trois* vecteurs 2 à 2 non colinéaires n'est pas forcément libre.

■ **Exercice 7.**

(Familles libres dans $\mathbf{K}^p$) Soit $u = (1,1,1,1), v = (1,0,-1,1), w = (0,-1,-2,0)$ et $\mathscr{F} = (u, v, w)$

1. La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre ?
2. Le cas échéant, trouver une combinaison linéaire non triviale de $u, v, w$.

**T10** **Prouver qu'une famille $\mathscr{F}$ de $p$ vecteurs d'un sev $F$ est libre**

1. Si $p = 1$, on prouve que le vecteur de $\mathscr{F}$ est non nul.
2. Si $p = 2$, un argument de non proportionnalité des vecteurs de $\mathscr{F}$ suffit en général.
3. Si $p \geq 3$ la liberté **n'est jamais évidente** : on part de la définition et on exploite l'égalité vectorielle suivant la nature des vecteurs (une fonction est nulle si on part d'une CL de fonctions, ou une suite est nulle si on part d'une CL de suites,...). On peut ensuite recourir à des arguments en lien avec la nature des vecteurs (valeurs en certains points, limites, parité, régularité, degré, croissances comparées des termes de la CL *etc.*, voir **T3**).
4. Si $F$ est de dimension finie et qu'on dispose d'une base $\mathscr{B}_F$ de $F$, on peut aussi travailler en coordonnées et prouver que $\text{Mat}_{\mathscr{B}_F}(\mathscr{F})$ (`Déf.12`) est de rang $p$.

**■ Exemple 3.**

1. Les fonctions $\mathbf{c} = \cos$ et $\mathbf{s} = \sin$ sont libres (argument de parité).
2. Les fonctions $\mathbf{u} : x \mapsto |x-1|$ et $\mathbf{v} : x \mapsto x^2$ aussi par régularité.
3. Les fonctions $\mathbf{u} = \ln, \mathbf{v} = \exp, \mathbf{w} = X^2$ sont libres par argument de croissance à l'infini.

# 6 Bases

**■ Définition 8** ............................................ `[Base de E ou d'un s-e.v. de E]`
Une base d'un s-e.v. $F$ d'un e.v. $E$ est une famille à la fois génératrice de $F$ et libre.

**■ Exemple 4.**
Exemples de bases :

— Revoir les exemples du **I**,

— Si $\mathscr{F}$ est une famille libre, c'est aussi une base de $\text{Vect}(\mathscr{F})$.

**■ Proposition 5** ............................................ `[Familles génératrices et bases]`
Toute famille génératrice d'un s-e.v. contient une base de ce s-e.v..

**■ Proposition 6** ...................................................... `[Propriétés des bases]`
Si $\mathscr{B}$ est une base d'un s-e.v. $F$ d'un e.v. $E$, alors tout vecteur $\mathbf{x}$ de $F$ est CL des éléments de $\mathscr{B}$ par un unique jeu de coefficients.

**■ Remarque 3.**
C'est cette propriété qui permet de parler des coordonnés d'un vecteur d'un s-e.v. $F$ sur une base de ce s-e.v. (`Déf. 11`).

# 7 Dimension. Dimension finie. Rang

**■ Définition 9** ............................................................ `[Dimension finie]`
Un espace vectoriel est dit de dimension finie si il est réduit à $\{\mathbf{0}\}$ ou si il admet une base constituée d'un nombre fini de vecteurs. Sinon il est dit de dimension infinie.

■ **Théorème 4** ............................................................[*de la dimension*]
Dans un e.v. $E$ de dimension finie non réduit à $\{0\}$, toutes les bases possèdent un nombre commun (et donc fini) de vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de $E$.

**T11** **Calculer la dimension d'un ev ou un s-ev $E$**

1. Si c'est un ev à connaître : on cite le cours.
2. Sinon, on en trouve une base $\mathscr{B}$, et on compte le nombre de vecteurs dans $\mathscr{B}$ : c'est la dimension de $E$

■ **Théorème 5** ...................................................... [*Inclusion et dimension*]

1. Tout s-e.v. d'un e.v. de dimension finie est de dimension finie.
2. Si $F \subset G$ et $F, G$ sont de dimension finie, alors $\dim F \leq \dim G$.
3. Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.

■ **Définition 10** ...................................... `[Rang d'une famille finie de vecteurs]`
C'est la dimension du Vect qu'ils engendrent. Elle ne peut excéder le cardinal de la famille.

**T12** **Calculer la dimension de $F$ =Vect($\mathscr{F}$)**

1. Si $\mathscr{F}$ est libre, dim $F$ = le cardinal de $\mathscr{F}$.
2. Sinon, on calcule le rang de la famille $\mathscr{F}$, qui peut s'obtenir par pivot si $F$ est un s-ev d'un ev $E$ dont on a une base et **T9**.

■ **Exercice 8.**

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}_2[\mathrm{X}]$, soit $F = \mathrm{Vect}(1+X, 3)$,et $G = \mathbf{R}_1[\mathrm{X}]$. Montrer que $F = G$.

■ **Théorème 6** ............................................ [*Bases d'un s-e.v. de dimension connue*]
Si $F$ est un s-e.v. de dimension $d > 0$ et si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de $F$, alors sont équivalents :

1. $\mathscr{F}$ est une base de $F$ (libre et génératrice de $F$).
2. $\mathscr{F}$ est génératrice de $F$ et possède $d$ vecteurs.
3. $\mathscr{F}$ est libre et possède $d$ vecteurs.

**T13** **Prouver qu'une famille $\mathscr{F}$ est une base de $F$**

1. **Si on connaît la dimension de** $F$, mettons $\dim F = d$.
   - **a)** On vérifie que $\mathscr{F}$ contient $d$ vecteurs.
   - **b)** **i)** Si on sait que $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, $\mathscr{F}$ est donc uen famille génératrice de $F$ à $d$ vecteurs.
     - **ii)** Sinon, on prouve que $\mathscr{F}$ est (on peut passer par **T9 -2** pour cela le cas échéant).
   - **c)** On conclut avec **Thm 6.** point **3.** ou **2.**
2. **Si on ne connaît pas la dimension de** $F$**.** On revient à la définition de base **Déf. 8**.

## 8 Coordonnées. Calcul matriciel

**■ Définition 11** .......................................... [Matrice/coordonnées d'un vecteur]
Si $\mathbf{x}$ est un vecteur d'un s-e.v. $F$ d'un e.v. $E$, et si $\mathscr{B}_F = (\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_d})$ est une base de $F$, la matrice [des coordonnées] de $\mathbf{x}$ sur la base $\mathscr{B}_F$ est la **colonne** $X$ définie de façon unique (`Prop.6`) par la relation :

$$F \ni \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{e_1} + \dots \lambda_d \mathbf{e_d} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix}$$

**T14** **Écrire les coordonnées d'un vecteur sur une base**

Trouver les coeffs. Les écrire en colonnes.

**■ Définition 12** ...................... [Matrice d'un système de vecteurs sur une base donnée]
La matrice d'une famille $\mathscr{F}$ de $p$ vecteurs $(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_p})$ d'un s-e.v. $F$ sur une base $\mathscr{B}_F$ de ce s-e.v. est la matrice $A$ à $p$ colonnes dont la $j$-ème colonne est $\underbrace{\text{la matrice de } \mathbf{x_j}}_{\texttt{Déf. 11}}$.

**T15** **Écrire la matrice d'un système de vecteurs**

**■ Théorème 7** .............................................................. [*Calcul en coordonnées*]
Avec les notations de `Déf.12` : la famille $\mathscr{F}$ est libre ssi $A$ est de rang $p$, génératrice de $F$ ssi $A$ est de rang $\dim F$, une base de $F$ ssi $A$ est inversible (dans ce dernier cas, $A$ s'appelle **matrice de passage** de $\mathscr{B}_F$ à $\mathscr{F}$).

**■ Remarque 4.**
Cette approche matricielle permet d'utiliser les méthodes vues en première année.

■ **Définition 13** ........................................................ [Matrice de passage]
Toute matrice d'une famille de vecteurs qui est inversible.

■ **Remarque 5.**
En effet, les colonnes d'une telle matrice représentent la famille $\mathscr{F}$ sur la base $\mathscr{B}_F$. On l'appelle pour cela matrice de passage de la base $\mathscr{B}_F$ à la base $\mathscr{F}$.

---

**T16** **Quand envisager un traitement matriciel de la question ?**

Dès qu'on dispose d'une **base**, on dispose de **coordonnées sur cette base**, et donc du **calcul matriciel**. On peut retenir ce slogan :

Dimension finie + base $\longrightarrow$ matrices

---

■ **Théorème 8** ........................................ [*Première formule du changement de base*]
Si $E$ est un e.v. de base $\mathscr{B}$, si $\mathscr{B}'$ en est une autre base, et si $P$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ alors pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $E$, les coordonnées $X$ de $\mathbf{x}$ sur $\mathscr{B}$ sont reliées à ses coordonnées $X'$ sur $\mathscr{B}'$ par : $X = PX'$.

■ **Remarque 6.**
Ne pas confondre avec la seconde formule du changement de base, qui concerne non pas les vecteurs, mais les applications linéaires !

---

**T17** **Calculer les coordonnées d'un vecteur $\mathbf{u}$ sur une base $\mathscr{B}'$ ?**

1. Méthode œil de lynx : vous devinez à vue.
2. Formule du changement de base :
   - **a)** Introduire les coordonnées $U$ de $\mathbf{u}$ sur la base initiale $\mathscr{B}$(p.ex : $\mathscr{B}$ = la base canonique si l'ev en possède une). C'est une **colonne**
   - **b)** Introduire les coordonnées $U'$ de $\mathbf{u}$ sur la base $\mathscr{B}'$ sur laquelle on cherche les coordonnéees de $\mathbf{u}$. C'est une **colonne, mais ses coefficients sont à déterminer**.
   - **c)** Introduire la matrice de passage $P$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Normalement, elle a été déjà introduite pour dans une question antérieure pour prouver que $\mathscr{B}'$ est libre.
   - **d)** Utiliser le fait que $U = PU'$. Donc, $U' = P^{-1}U$
   - **e)** Le calcul explicite de $U'$ demande donc de résoudre un système linéaire au minimum, sinon carrément d'inverser $P$.
3. Si $\mathbf{u}$ est un vecteur propre d'un endomorphisme $f$, et $\mathscr{B}'$ une base de vecteurs propres de $f$, tout cela est inutile !

---

■ **Exercice 9.**
Dans $E = \mathbf{R}_2[X]$, on considère : $P = 1+X$, $Q = 3$, $R = X^2 - X$, $T = X^2 + 1$. Soit aussi :
$F = \text{Vect}(P, Q)$, $G = \mathbf{R}_1[X]$ et $H = \text{Vect}(T, R)$.

1. Donner une base et la dimension de $\mathscr{H}$.
2. En notant que $P \in E$, mais aussi que $P \in F$ et enfin que $P \in G$, donner les coordonnées de :
   - **a)** $P \in E$ sur la base canonique.

**b)** $P \in F$ sur la base canonique.

**c)** $P \in F$ sur la base $(P, Q)$ (vérifier que c'est une base de $F$).

**d)** $P \in H$ sur la base $(T, R)$ (idem).

**e)** $P \in H$ sur la base $(R, T)$.

## ■ Exercice 10.

Soit $E = \{y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}) \quad y'' + y = 0\}$. Notons aussi $f_1 : x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $f_2 : x \mapsto \sin x$.

**1.** Montrer que $E$ est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.

**2.** Montrer que $(f_1, f_2)$ est une base de $E$.

**3.** Soit $g = \frac{5}{2}\cos + 2\sin$.

**a)** Justifier que $g \in E$.

**b)** Donner les coordonnées de $g$ sur la base $(f_1, f_2)$.