CH8 – Séries numériques

Plan du chapitre

Liste des définitions

Liste des techniques de base

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. **$\mathbf{T_0}$** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

1 Généralités

A) Ce qu'est une série

■ Définition 1 .... [Série numérique, terme général d'une série]

— C'est un nouveau type d'objet. Ce n'est ni un nombre, ni une suite.

— Un objet de type série est noté : $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$.

Dans cette notation :

1. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite réelle ou complexe.
2. n_0 est la rang initial de la série, souvent $n_0 = 0$, 1 ou 2. C'est aussi le rang initial de la suite (u_n).
3. u_n s'appelle dans ce contexte Le *terme général de la série*. C'est également le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

■ Définition 2 .... [Somme partielle d'une série]

Si $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$, est une série, la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ de terme général $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ s'appelle *suite des sommes partielles* de la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$. Le nombre S_n s'appelle somme partielle (de rang n) de la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$.

■ Proposition 1 .... [Lien entre t.g et somme partielle d'une série]

Pour la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$: $\quad \forall n > n_0 \quad S_{n-1} + u_n = S_n$

B) Convergence d'une série

■ Définition 3 .... [Convergence d'une série - somme d'une série - nature d'une série]

Avec les notations des définitions précédentes :

— La série est dite *convergente* si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est convergente.

— La limite ℓ de cette suite s'appelle la *somme* de la série et se note $\ell = \sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} u_k$

— Si une série ne converge pas, on dit qu'elle est *divergente*.

— Étudier la *nature* d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

■ Exemple 1.

1. La série $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n$ est divergente.
2. La série $\sum\limits_{n\geq 0}(1/2)^n$ est convergente, car la suite des sommes partielles tend vers 2. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geq 0}(1/2)^n$ a pour somme 2. On écrit donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2$

Séries télescopiques

Ce sont les séries du type $\sum\limits_{k \geq n_0} u_k$ pour lesquelles le t.g est de la forme $u_k = v_{k+1} - v_k$.

1. Comme les sommes partielles se calculent simplement par telescopage (en effet : $\forall n \geq p : \quad S_n = u_{v+1} - \underbrace{v_{n_0}}_{\text{constante}}$),
2. on conclut de **1.** que la suite $(S_n)_{n \geq p}$ des sommes partielles converge si et seulement si la suite (v_n) converge, et dans ce cas, la somme de la série est : $S = (\lim\limits_{n \to +\infty} v_n) - u_{v_0}$.

C) Série tronquée

■ **Définition 4** .... [Troncature d'une série]

Si $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ est une série, et $n_1 \geq n_0$, la série $\sum\limits_{n \geq n_1} u_n$ s'appelle une troncature de la série.

■ **Proposition 2** .... [Invariance de la nature par troncature]
Une série et une troncature de celle-ci sont de même nature.

■ **Exemple 2.**

Les séries $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{1}{n!}$ et $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ sont de même nature.

■ **Remarque 1.**

Ceci permet de considérer le terme général d'une série à partir d'un certain rang. Cela simplifie l'étude, notamment lorsque l'on a identifié le t.g. comme une combinaison linéaire de t.g. de séries connues.

T2 Calcul de troncature

En général une série est distincte de sa troncature.

1. P.ex, Les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ sont distinctes.

a) Toutefois, il existe un lien entre leurs sommes partielles respectives $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(S'_n)_{n\geq 2}$ puisque :

$$\forall n \geq 2 \quad S_n = u_0 + \cdots + u_n = u_0 + u_1 + \underbrace{u_2 + \cdots + u_n}_{\text{présent car } n\geq 2} = u_0 + u_1 + S'_n$$

b) Les sommes de ces séries sont distinctes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \overset{\textbf{1. a)}}{=} (u_0 + u_1) + \sum_{n=2}^{\infty} u_n$$

2. Noter que troncature $\neq$ glissement d'indice. P.ex :

$$\underbrace{\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}}_{\text{ma série}} \neq \underbrace{\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n!}}_{\text{troncature de ma série}} \qquad \text{mais} \qquad \underbrace{\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}}_{\text{ma série}} \overset{\text{glissement}}{\underset{\text{d'indice}}{=}} \underbrace{\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-2)!}}_{\text{c'est encore ma série}}$$

D) Structure vectorielle de l'ensemble des séries

■ **Définition 5** .... [Combinaison linéaire de séries]

Si $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n$ sont deux séries et a, b deux scalaires on définit la série notée $a \sum\limits_{n\geq n_0} u_n + b \sum\limits_{n\geq n_0} v_n$ comme la série $\sum\limits_{n\geq n_0} (au_n + bv_n)$.

■ **Proposition 3** .... [structure vectorielle]

1. L'ensemble $\mathscr{S}$ des séries numériques est un $\mathbf{R}$—espace vectoriel.

2. L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des séries convergentes en est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}$.

■ **Remarque 2.**

La somme d'une série convergente définit sur $\mathscr{S}_0$ une forme linéaire, puisque si $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n$ sont dans $\mathscr{S}_0$, alors :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2 \quad \sum_{k=n_0}^{+\infty} (au_n + bv_n) = a \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_n + b \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_n$$

E) Séries de références

Servent tout le temps dans les exercices

■ **Théorème 1** .... [*Séries géométriques*]

1. La série géométrique $\sum_{k\geq 0} q^k$ converge **si et seulement si** $|q|<1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Il en est de même pour la série de t.g. q^{k+1}, (ou q^{k+2} *etc*).

2. Les séries géométriques dérivées $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$ et $\sum_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|q|<1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}. \tag{1}$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}. \tag{2}$$

■ **Remarque 3.**
Ne pas confondre :
- Suite géométrique :
- Série géométrique :
- Somme de termes consécutifs d'une série géométrique :
- Somme d'une série géométrique :

T_3 **Calcul de la somme d'une série géométrique tronquée**

1. On écrit la somme sous forme développée :

$$S = \sum_{k=p}^{+\infty} q^{k-k_0} = q^{p-k_0} + q^{p+1-k_0} + \dots$$

2. **a)** Si le premier terme de la somme ainsi développé vaut 1 : on a une série géométrique complète et $S = \dfrac{1}{1-q}$.

b) Sinon *on factorise le premier terme de S* pour se ramener au cas **2. a)** :

$$S = q^{p-k_0}(\underbrace{1+q+q^2+\dots}_{\text{série géométrique complète}}) = q^{p-k_0} \times \frac{1}{1-q}.$$

■ **Exemple 3.**
Calculer $S = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

■ **Définition 6** .... [Séries exponentielles]

Ce sont les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$

■ **Théorème 2** .... [*Série exponentielle*]
Pour tout réel x, la série de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ converge et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.\text{ En particulier} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

■ **Définition 7** .... [Série harmonique]
C'est la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

■ **Théorème 3** .... [*Séries zêta*]

1. La série harmonique diverge vers $+\infty$. Il en est de même pour la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ (Prop.2).
2. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Il en est de même pour la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)^2}$ (Prop.2).

■ **Exemple 4.**
Nature la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}$, et calcul de la somme le cas échéant.

2 Étude de la convergence des séries

A) Condition nécessaire de convergence

■ **Proposition 4** .... [Condition nécessaire de convergence d'une série]
Pour qu'une série soit convergente, **il faut** que son terme général converge vers 0. La réciproque est fausse (ça ne suffit pas !).

■ **Exemple 5.**
☠ Le t.g. de la série harmonique converge vers 0, mais la série harmonique diverge (Thm. 3)

■ **Définition 8** .... [série grossièrment divergente]
Série dont le terme général ne tend pas vers 0. Elle est divergente par contraposition de la prop.4.

B) Condition suffisante de convergence

■ **Définition 9** .... [Absolue convergence]
La série $\displaystyle\sum_{k\geq n_0} u_k$ est dite absolument convergente si la série $\displaystyle\sum_{k\geq n_0} |u_k|$ est convergente.

■ **Théorème 4** .... [*Cond. suffisante de convergence*]
Si une série converge absolument, alors elle converge. La réciproque est fausse.

■ **Remarque 4.**
Ceci incite à porter une attention particulière à l'étude des séries à termes positifs.

■ **Exemple 6.**
La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente mais non absolument convergente.

3 Séries à termes positifs

A) Convergence monotone

■ Théorème 5 .... [*Cv monot.*]
Si la série $\sum_k u_k$ est à termes positifs, elle converge si et seulement si la suite des **sommes partielles** est **majorée**. Sinon, la série diverge vers $+\infty$.

B) Équivalents

■ Théorème 6 .... [*équivalents*]
Deux séries à *termes positifs* de termes généraux équivalents sont de même nature.

☠ On applique ce théorème en **travaillant sur les termes généraux, pas les séries, ni les sommes partielles.**

■ Exemple 7.

Montrer que la série de terme général $u_k = \ln\left(1 + \frac{1}{4k^2}\right)$ converge.

C) Théorème de comparaison

■ Théorème 7 .... [CCSATP]
Si à partir d'un certain rang p (souvent $p = 1, 2$) : $0 \leq u_k \leq v_k$ alors :

1. si la série $\sum_k v_k$ converge, la série $\sum_k u_k$ aussi. Dans ce cas, on a de plus la relation suivante sur les sommes des séries : $\sum_{k=p}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=p}^{+\infty} v_k$
2. si la série $\sum_k u_k$ diverge, la série $\sum_k v_k$ aussi.

☠ On applique ce théorème en **travaillant sur les termes généraux, pas les séries, ni les sommes partielles.**

■ Exemple 8.

1. **a)** Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$.

   b) En déduire la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

2. Étudier la nature de $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{1/3}}$.

T4 Comment étudier la nature d'une série ?

1. Si le t.g. ne tend pas vers 0 : **grossière divergence**. Fin.
2. Sinon : **reconnaître :**
   - **a)** le t.g. d'une série de référence ou une combinaison linéaire de t.g. de séries de nature connue.
   - **b)** sinon : le moment d'une variable aléatoire discrète.
   - **c)** sinon : une série télescopique,
3. Sinon : **calculer** les sommes partielles S_n si ce sont des sommes qu'on sait calculer **T0**, et étudier la nature de la suite (S_n).
4. Sinon : examiner le **signe du t.g.** :
   - **a)** Si le terme général de la série est positif :
     - **i)** chercher un équivalent du t.g. et utiliser les séries de référence.
     - **ii)** sinon, utiliser le CCSATP sur le t.g..
   - **b)** Sinon : étudier l' absolue convergence de la série pour se ramener à un t.g. positif.

— ☠ On ne travaille **jamais** sur autre chose que le t.g.(sauf situation **3.**)

— Dans les calculs, on ne manipule **jamais la série elle-même**.

— Dans les calculs ,on n'introduit jamais **la somme** de la série avant d'avoir prouvé sa convergence par les méthodes **1-4**.

T5 Comment calculer la somme d'une série ?

1. Reconnaître le moment d'une variable aléatoire discrète (et appliquer éventuellement la formule de Koenig).

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{n!}.$$

2. Calcul explicite des sommes partielles si ce sont des sommes usuelles, notamment **T1**. Attention aux troncatures **T2**.
3. Écrire le t.g comme CL de t.g. de séries de sommes connues.

$$(n^2+n)x^{2n} \overset{q=x^2}{=} n(n-1)q^n+2nq^n \overset{n^2+n=n^2-n+2n=n(n-1)+2n}{=} q^2\underbrace{n(n-1)q^{n-2}}_{\text{connu}}+2q\underbrace{nq^{n-1}}_{\text{connu}}$$

T6 Comparaison avec une intégrale pour l'étude de $\sum_{n\geq p} f(n)$

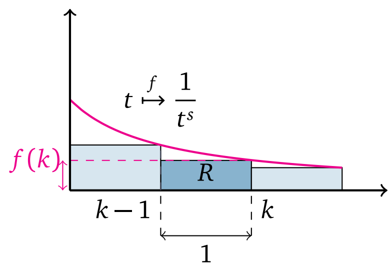
Si f est une fonction *décroissante positive*, pour prouver la convergence de $\sum_{n\geq p} f(n)$:

1. On fixe un rang $k \geq p$, et par décroissance de f : $\forall t \in [k-1, k] \quad 0 \leq f(k) \leq f(t)$.
2. Donc par croissance de l'intégrale :
$$\forall k \geq p \quad 0 \leq u_k \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t.$$
3. Enfin, en sommant les inégalités précédentes de $k = p$ à $k = n$ ($n \geq p$ étant entier fixé), par relation de Chasles :
$$\forall n \geq p \quad 0 \leq S_n \leq \int_{p-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t.$$
4. Si on sait majorer cette dernière intégrale par un réel *indépendant de* n, cela établit la convergence de la série.

Rem. On peut aussi établir la **divergence** de la série en **minorant** les sommes partielles par une intégrale tendant vers $+\infty$ avec n.

Exemple 9.

Convergence de $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^s}$ *pour* $s > 1$.



1. Par décroissance sur $\mathbf{R}_+^\star$ de $t \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{t^s}$:
$$\forall k \geq 2 \quad \forall t \in [k-1, k] \quad 0 \leq \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{t^s}$$
2. puis par croissance de l'intégrale :
$$0 \leq \underbrace{\frac{1}{k^s}}_{\text{Aire du rectangle } R=1\times f(k)} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$$
3. et enfin par sommation de $k = 2$ à $k = n$ et par la relation de Chasles :
$\forall n \geq 2 \quad 0 \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$. D'où par primitivation :
$$\forall n \geq 2 \quad 0 \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{n^{s-1}}\right) \leq \frac{1}{s-1}.$$
4. Les sommes partielles de la série sont majorées par $1/(s-1)$. Comme la série est à termes positifs, elle converge.