# CH9 – Théorie basique des probabilités

## Plan du chapitre



## Liste des définitions

### Liste des techniques de base



**Grille d'analyse des exercices**

| Exercice | Question | T | Référence(s) | Commentaires/remarques |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

1. $\mathbf{T_0}$ : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

## Faire attention à ce qui suit

### Dénombrabilité

**■ Définition 1** ............ [Ensemble infini et dénombrable]
Ensemble en bijection avec $\mathbf{N}$.

**■ Remarque 1.**
Intuitivement, c'est un ensemble dont on peut numéroter les éléments.

**■ Exemple 1.**
Les ensembles $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^\star, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ sont infinis et dénombrables. L'intervalle $[0,1]$ ne l'est pas.

**■ Définition 2** ............ [Ensemble au plus dénombrable]

Ensemble qui est fini ou alors infini et dénombrable.

**■ Remarque 2.**
Ne pas confondre ensemble fini et ensemble borné.

### Opérations ensemblistes, sommes et dénombrabilité

Si $I$ est un ensemble au plus dénombrable, $\bigcup_{i\in I}, \bigcap_{i\in I}, \sum_{i\in I}$ sont des notations signifiant suivant le contexte réunion/intersection/somme [1] finie ou dénombrable.

## 1 Vocabulaire des probabilités

La théorie des probabilités fournit un cadre mathématique permettant d'analyser mathématiquement des *expériences aléatoires*, en mettant en évidence des comportements réguliers sur des phénomènes considérés comme imprévisibles.

### A) Ce qu'est une expérience aléatoire

**■ Définition 3** ............ [Expérience]
Processus reproductible aboutissant à un résultat observable $\omega$.

**■ Définition 4** ............ [Expérience alétoire]
le résultat observable de l'expérience est variable lors de réalisations de l'expérience : $\omega$ n'est pas unique.

**■ Définition 5** ............ [Univers associé à une expérience]
Ensemble $\Omega$ contenant toutes les valeurs possibles de $\omega$.

**■ Remarque 3.**

1. On admet que pour toute expérience, il existe un univers décrivant les observations possibles à son issue.
2. Une expérience aléatoire a donc par définition un univers contenant au moins deux éléments. Sinon, l'expérience est dite déterministe.

**■ Définition 6** ............ [Observation – Évènement élémentaire]

Si $\omega$ est un élément de $\Omega$, $\omega$ s'appelle observation, et $\{\omega\}$ s'appelle évènement élémentaire.

1. Si $I$ est fini, c'est une somme contenant un nombre fini de réels, sinon c'est la limite d'une série convergente, c'est-à-dire sa somme.

■ **Définition 7** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . [Stochastique]
Relatif à la théorie des probabilités.

## B) Dictionnaire bilingue probas/théorie des ensembles

■ **Définition 8** . . [évènement, certain, impossible, implique, contraire, incompatibles, SCE]

| Notation | Terme ensembliste | Traduction probabiliste |
|---|---|---|
| $\mathscr{T}$ | Tribu ($\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$ en sup.) | Ensemble des évènements |
| $\Omega$ | partie pleine | univers |
| $\varnothing$ | ensemble vide | évènement impossible |
| $\omega \in \Omega$ | élément de $\Omega$ | $\omega$ est une observation |
| $A \in \mathscr{T}$ | élément de $\mathscr{T}$ | $A$ est un évènement |
| $\omega \in A$ | $\omega$ appartient à $A$ | $\omega$ est une réalisation de l'évènement $A$ |
| $A \subset B$ | $A$ est inclus dans $B$ | $A$ implique $B$ |
| $\bar{A}$ | ensemble complémentaire de $A$ | évènement contraire de $A$ |
| $A \cup B$ | réunion | évènement [$A$ ou $B$] |
| $A \cap B$ | intersection | évènement [$A$ et $B$] |
| $A \cap B = \varnothing$ | $A$ et $B$ sont disjoints | $A$ et $B$ sont incompatibles |
| $(A_i)_{i\in I}$ t.q.<br>• $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$<br>• $i \neq j \Leftrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ | $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de $\Omega$ | $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements (SCE) |

---

**T1** Usage du dictionnaire

**Cette technique est de loin la technique la plus importante de la théorie des probabilités**. Le dictionnaire permet de passer de la formulation en français d'un énoncé à sa traduction mathématique et *vice-versa*. Il faut donc toujours commencer par :

1. Introduire des évènements correctement définis et les plus élémentaires possibles.. Par exemple : $P_k$ : «on a eu pile à l'issue du $k$-ème lancer» est un évènement d'intérêt et bien défini. En revanche : $P$ : «on a pile» n'est pas bien défini.
2. Utiliser le dictionnaire et les évènements définis dans **1.** pour exprimer les évènements plus élaborés à l'aide des opérations ensemblistes.

Sans formation correcte des évènements, impossible de calculer des probabilités.

---

### ■ Exemple 2.

On lance un dé. On observe le score.

1. Lister les observations possibles.
2. En déduire l'univers $\Omega$.
3. Expliciter les évènements suivants et dire si ils sont élémentaires :
   a) $A_2$ :« le score obtenu est plus grand que 2».
   b) $A_3$ :«le score obtenu est plus grand que 3 ».
   c) $\Pi$ :«le score obtenu est pair».
   d) $J$ :«le score obtenu est impair».
   e) $D$ : «On obtient 2».
4. Écrire en langage probabiliste :
   a) [Observer] un score plus grand que 3 implique [d'observer] un score plus grand que 2
   b) Observer un score impair et observer un score pair sont incompatibles.
   c) [Observer] 2 est une réalisation de [l'évènement « observer] un score pair. »

### ■ Exemple 3.

On dispose d'une pièce équilibrée, on la lance une infinité de fois. On observe la suite des lancers.

1. Définir l'univers associé à cette expérience.
2. Pout tout entier $k \geq 1$, on note $F_k$ l'évènement : le $k$-ème lancer donne face. Est-ce que $F_1$ est un évènement élémentaire ?
3. Exprimer à l'aide des évènements $F_k$ les évènements suivants :
   a) $A_1$ : «Les 5 premiers lancers ont donné face».
   b) $A_2$ : «Le premier face a eu lieu au lancer 14».
   c) $A_3$ : «Sur les 78 premiers lancers, il y a eu un face (au moins)» (*passer par le contraire*)
4. Soit $n \geq 2$.
   a) $B_n$ : «les $n$ premiers lancers ont donné face».
   b) $C_n$ : « Le premier pile a eu lieu avant le lancer $n$ (inclus)».
   c) $D_n$ : «Le premier pile a eu lieu au lancer $n$» (à l'aide des $C_k$).
   d) $E_n$ : «Le deuxième pile a eu lieu au lancer $n$».
5. a) $G$ : «on n'a jamais observé pile».
   b) $F$ : «il y a eu au moins un face ».
6. Soit $n \geq 1$. Traduire : «N'avoir observé aucun pile implique que les $n$ premiers lancers ont donné face.»

## 2 Mesure de probabilité

**■ Définition 9** ........................................................ [Tribu (d'évènements)]
Les tribus sont les structures garantissant que les opérations standard sur les évènements donnent encore des évènements, à savoir les opérations $\bar{\ }$, $\bigcup\limits_{i\in I}$, et $\bigcap\limits_{i\in I}$. Autrement dit, ce sont des ensembles d'évènements stables par les opérations précédentes.

### A) Propriétés axiomatiques d'une probabilité

**■ Définition 10** ........................................ [Mesure de probabilité ou probabilité]
Soit $\Omega$ un univers, équipé d'une tribu $\mathscr{T}$. Une *probabilité sur* $\Omega$ est une fonction $P$ définie sur $\mathscr{T}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. *Normalisation.* : $P(\Omega) = 1$.
2. *Positivité.* $\forall A \in \mathscr{T} \quad P(A) \geq 0$.
3. *$\sigma$-additivité (s'appelle additivité finie si $I$ est fini)* . Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'évènements deux à deux incompatibles, alors :
   a) la série de t.g $P(A_i)$ converge.
   b) De plus, il est vrai que $P\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \sum\limits_{i\in I} P(A_i)$.

**■ Remarque 4.**
La convergence de la série dans **3.a)** n'est pas à vérifier : elle est exigée dans les propriéts de la fonction $P$.

**■ Remarque 5.**
Attention au sens du mot *probabilité :*

1. **TYP** Fonction Probabilité = La fonction définie sur $\mathscr{T}$ (notée $P$ en général, `déf.` 8)
2. **TYP** Fonction Probabilité = synonyme de mesure de probabilité (plus court que mesure de probabilité)
3. **TYP** Réel Probabilité = probabilité d'un évènement $A$ = réel $P(A)$ = valeur de la fonction éponyme sur un point $A \in \mathscr{T}$ de son domaine.

---

**T2** **Comment utiliser la $\sigma$-additivité**

1. On justifie que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'évènements 2 à 2 imcompatibles.
2. On ajoute ensuite : «*par $\sigma$-additivité la série de t.g. $P(A_n)$ est convergente et sa somme vaut $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$ :*»

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

---

**■ Définition 11** ................................ [Espace probabilisable - espace probabilisé]
Un univers $\Omega$ équipé d'une tribu d'évènements $\mathscr{T}$ est dit probabilisable. Un espace probabilisatble équipé d'une fonction de probabilité $P$ définie sur $\mathscr{T}$ fait du triplet $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé.

**■ Proposition 1** ........................................ [Propriétés d'une probabilité $P$]

1. Pour tout évènement $A$ de $\mathscr{T}$ : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\varnothing) = 0$.
3. Pour tout évènements $A$ et $B$ de $\mathscr{T}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

**■ Définition 12** ........................ [SQCE, quasi-certain/presque sûr, quasi-impossible]

| Notation | Traduction ensembliste | Traduction probabiliste |
|---|---|---|
| $\bullet P\left(\underset{i\in I}{\cup} A_i\right) = 1$<br>$\bullet i \neq j \Leftrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ | Notions d'analyse et pas de théorie des ensembles puisqu' elles font intervenir la fonction $P$ ! | $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi- complet d'évènements (SQCE) |
| $P(A) = 1$ | | $A$ est un évènement quasi-certain/presque sûr |
| $P(A) = 0$ | | $A$ est un évènement quasi impossible |

**■ Exercice 1.**
Alice et Bob lancent une pièce à tour de rôle. Alice commence. Le gagnant est le premier à faire `pile`. Les lancers sont supposés mutuellement indépendants. Soit $N$ l'évènement : «La partie ne s'arrête jamais», et $F_k$ l'évènement : «le $k$-ème lancer donne `face`». Le but est de montrer que $N$ est quasi-impossible.

1. Soit $n \geq 1$ un entier et $C_.$ «Les $n$ premiers lancers donnent face». Montrer que pour tout entier $P(N) \leq P(C_n)$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ : $P(N) \leq \dfrac{1}{2^n}$. Conclure.

## B) Construction de probabilités

**■ Définition 13** ..................................... [Distribution/fonction de masse sur $\Omega$]

Soit $\Omega = \{\omega_i \quad i \in I\}$ un ensemble au plus dénombrable. On appelle distribution ou fonction de masse sur $\Omega$ toute fonction $\pi$ définie sur $\Omega$ vérifiant :

1. $\forall i \in I \quad p_i := \pi(\omega_i) \geq 0$ ($\pi$ est une fonction à valeurs positives).
2. La série de t.g $p_i$ converge vers 1 : $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$.

**■ Théorème 1** ................................ [*Toute fonction de masse induit une mesure de proba*]

La donnée d'une fonction de masse $\pi$ sur $\Omega$ définit une mesure de probabilité $P$ sur $(\Omega, \mathscr{T})$ par :

$$\forall A \in \mathscr{T} \quad P(A) = \sum_{\substack{i\in I \\ \text{i tq.}\omega_i \in A}} \pi(\omega_i)$$

**TYP** On écrit $P(\{\omega\})$, mais il est correct d'écrire $\pi(\omega)$.

**■ Définition 14** .................................. [Probabilité uniforme - équiprobabilité]

Si l'ensemble $I$ (et donc. $\Omega$) est fini, en prenant $\pi$ constante égale à $\#\Omega$, on obtient comme mesure $P$ la mesure appelée probabilité uniforme ou équiprobabilité sur $\Omega$. On dit qu'on a équiprobabilisé $\Omega$.

**Exemple 4.**
Un dé fou est un dé possédant une infinité de faces numérotées $0, 1, 2, 3, \ldots$ et truqué : il existe un réel $\lambda > 0$ tel que pour tout entier $k$, la probabilité d'observer $k$ est à $\lambda 2^{-k}$.

1. Déterminer la valeur de $\lambda$.
2. Calculer la probabilité d'observer un score pair en lançant le dé fou.

# 3 Probabilité conditionnelle

## A) Mesure conditionnelle

**Définition 15** .................................. [mesure conditionnelle sous l'hypothèse $H$]
Si $H \in \mathscr{T}$ est tel que $P(H) \neq 0$, la fonction notée $P_H$ définie sur $\mathscr{T}$ par :

$$A \mapsto P_H(A) := \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$$

est une mesure de probabilité sur $\Omega$ appelée mesure conditionnelle sous l'hypothèse/observation $H$.

**TYP** Fonction La probabilité conditionnelle est une probabilité au sens de Déf. 8.

**Remarque 6.**

1. La fonction $P_H$ vérifie donc toutes les propriétés énoncées en **2.A)**. En particulier, $P_H(\bar{A}) = 1 - P_H(A)$.
2. La fonction $P_\Omega$ est simplement la fonction $P$.
3. Par définition, et même si $P(H) = 0$, il est vrai que $P(A \cap H) = P_H(A) \times P(H)$.
4. ☠ $A|H$, ou «$A$ sachant $H$» n'a **aucun sens** : ni $A|B$, ni «$A$ sachant $B$» ne sont des évènements : il n'y a aucun sens à exprimer ces notions de *sachant que* en dehors des fonctions $P$ et $P_H$, car on parle toujours d'un même évènement $A$, *mais* on *évalue* avec deux fonctions différentes ses chances de réalisation : $P(A)$ ou $P_H(A)$.
5. C'est pour cela que $P(A)$ s'appelle probabilité de $A$ *a priori* (c'est-à-dire dans l'état des connaissances à l'issue de l'expérience/observation), et $P_H(A)$ s'appelle probabilité de $A$ *a posteriori* puisque, les connaissances ont évolué dans la mesure où l'on *sait* que $H$ a eu lieu.

## B) Formules usuelles

**Théorème 2** ................................................ [*Formule des probas composées*]

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $A_1, \ldots, A_n$ $n$ évènements d'un espace probabiilisé. On pose $\hat{A}_0 = \Omega$ et $\hat{A}_k = \bigcap_{j=1}^{k} A_j$ pour tout $k \in \{1 \ldots n\}$. Alors : $P(\hat{A}_n) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k | \hat{A}_{k-1}) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_2 \cap A_1) \times \cdots \times P(A_n|\hat{A}_{n-1})$.

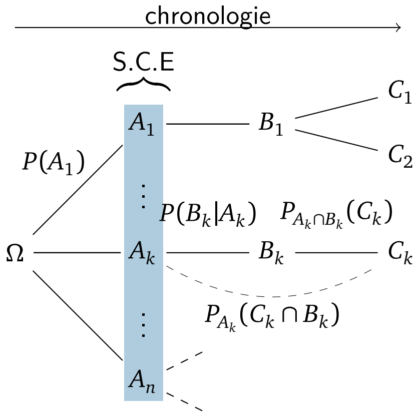
---

**T3** **Quand utiliser la formule des probabilités composées ?**

Formule utilisée pour calculer la probabilité d'une succession chronologique d'évènements, c-à-d. d'un **évènement réalisé par un seul chemin sur l'arbre probabiliste.** La formule est considérablement simplifiée les évènements de cette succession sont mutuellement indépendants.

---

## $T_4$ Arbres probabilistes : mode d'emploi




1. **Chemin :** le chemin $[\Omega{-}\bullet{-}\star{-}\circ\ldots]$ sur l'arbre représente l'évènement $[\bullet\cap\star\cap\circ\cap\ldots]$.
2. **Probabilité conditionnelle :** le poids d'un chemin de racine $\bullet$, mettons : $\bullet - \circ$ est égal à la probabilité conditionnelle $P_\bullet(\circ)$ (En particulier : si $\bullet = \Omega$, on calcule les probabilités *a priori*, voir **Rem.4**).
3. **Formule des probabilités composées :** les poids se multiplient le long des branches (composition des poids).
4. **Systèmes complets :** tout niveau d'arborescence est un S.C.E (ou un S.Q.C.E).
5. **Formule des probabilités totales :** si l'évènement $\bullet$ apparaît plusieurs fois *sur un même niveau* d'arboresence, $P(\bullet)$ est la somme des probabilités des occurrences de $\bullet$ sur l'arbre.
6. ☠ Un évènement ne peut jamais apparaître à deux niveaux d'arborescence distincts. Exemple : suite de pile ou face : $P-P-P$ : impossible, mais $P_1-P_2-P_3$ : ok.

■ **Théorème 3** ........................................................ [*Formule des probas totales*]

Si $(H_i)_{i\in I}$ est un SCE ou un SQCE de $\Omega$, alors la série de t.g. $P(A|H_i)P(H_i)$ converge et on a

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A|H_i)P(H_i)$$

## $T_5$ Quand et comment utiliser la formule des probas totales ?

1. Formule adaptée pour calculer la probabilité d'un évènement **se réalisant par plusieurs chemins sur l'arbre.**
2. **a)** La convergence de la série n'est pas à prouver : elle fait partie des conclusions du théorème.

   **b)** Il est *obligatoire* de citer le sqce utilisé.
3. **a)** En pratique, **il est obligatoire** d'écrire quelque chose comme : *D'après la formule de probabilités totales appliquée avec le* sqce $(A_k)_{k\geq 1}$, ***[****la série de t.g.* $P_{A_k}(E)P(A_k)$ *converge, et sa somme vaut* $P(E)$***]*** :

   $$P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{A_k}(E)P(A_k)$$

   **b)** Bien évidemment, si le sqce est fini, la somme apparaissant ne contient qu'un nombre fini de termes, il n'y a donc pas de série dans ce cas, donc on n'écrit pas la partie **[** ...**]** de **3.a)**, et on passe directement à :

   $$P(E) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(E)P(A_k).$$

T6 **Quand utiliser la formule de Bayes ?**

Formule permettant de renverser causes et effets dans le calcul stochastique. **S'applique lorsque le chemin $H-A$ ne suit pas la chronologie sur l'arbre.** Le dénominateur $P(A)$ se calcule dans la plupart des cas par **probabilités totales**, et a dû être calculé dans une question antérieure.

**■ Exemple 5.**
On dispose d'une infinité d'urnes $U_0, U_1, \dots$ Chaque urne contient exactement une pièce d'or, et d'autres babioles, si bien que la probabilité de tirer la pièce d'or dans $U_k$ est, pour tout entier $k$, $\dfrac{1}{ek!}$. Un lutin joue au jeu suivant :

— Il lance le dé fou.

— Il pioche dans l'urne dont il obtient le numéro par le dé fou.

Calculer la probabilité que le lutin tire une pièce d'or.

**■ Théorème 4** ........ [*Formule de Bayes*]
Si $A$ et $H$ sont deux évènements de probabilité non nulle :

$$P(H|A) = \frac{P(A|H)}{P(A)} \times P(H)$$

## 4 Mutuelle indépendance d'évènements

**■ Définition 16** ........ [Évènements indépendants]
Deux évènements $A$ et $B$ sont $(P-)$indépendants si et seulement si l'une des conditions suivantes équivalentes est vraie :

1. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
2. $P(A|B) = P(A)$
3. $P(B|A) = P(B)$

**■ Remarque 7.**
En général, on devrait parler de $P-$indépendance, car cette propriété dépend fortement de la fonction $P$ de probabilité avec laquelle on évalue les nombres apparaissant dans a-c.

**■ Définition 17** ........ [Évènements mutuellement indépendants]
Les évènements $A_1, \dots A_n$ sont mutuellement indépendants si et seument si :

**C2)** $\forall i, j$ tels que $i < j$, $A_i$ et $A_j$ sont indépendants,

**C3)** $\forall i, j, k$ tels que $i < j < k$ : $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$,

$\vdots$

**C$k$)** $\forall i_1, \dots, i_k$ tels que $i_1 < \dots < i_k$ : $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_k})$,

$\vdots$

**C$n$)** $P(A_1 \cap \dots A_n) = P(A_1) \times \dots \times P(A_n)$.

**■ Remarque 8.**

1. Dans **C$k$**), $\binom{n}{k}$ conditions. Pour $n$ évènements, il y a au total $2^n - n - 1$ conditions dans **Déf. 17** (ex : 26 conditons pour 5 évènements).

**2.** La mutuelle indépendance est rarement à prouver : elle est soit une hypothèse, soit une conséquence du modèle.

■ **Définition 18** ........................... [indépendance d'une famille infinie d'évènements]
La famille $\mathscr{F}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants si toute sous-famille finie d'évènements extraite de $\mathscr{F}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants au sens de la **Déf. 17**.

■ **Proposition 2** ............................................... [Indépendance et contraire]
La propriété de mutuelle indépendance des évènements d'une famille est préservée en remplaçant dans la famille autant d'évènements que souhaité par leur contraire.

---

## $T_7$ Comment calculer la probabilité d'un évènement $E$ ?

**1.** ☠ Le calcul ne commence *jamais* par «$P(E) = \dots$», car on raisonne *toujours* sur les évènements : on part de $E$ que l'on décompose à l'aide de **T1**.

**2. Pour les réunions $\bigcup$.**

**a)** Réunions finies : additivité finie pour une réunion finie d'évènements deux à deux incompatibles. Sinon, formule du crible.

**b)** Réunions infinies : $\sigma$-additivité pour une réunion dénombrable d'évènements deux à deux incompatibles.

**c)** Penser aussi à la formule des probabilités totales.

→ En passant aux probabilités, les réunions deviennent alors **a)** des sommes finies de nombres, ou **x** **b)** des sommes de séries convergentes.

**3. Pour les intersections $\bigcap$.**

**a)** Intersections finies : formule des probabilités composées. Si les évènements de l'intersection sont mutuellement indépendants, l'expression devient moins lourde.

**b)** Intersections infinies : *a priori*, on ne peut que **majorer** la probabilité $\pi = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right)$. On part de $\forall n \geq 1 \quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k$, puis en passant aux probabilités : $\forall n \geq 1 \quad \pi \leq P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$. On conclut avec le théorème des gendarmes la plupart du temps.

→ En passant aux probabilités, les intersections deviennent alors des **produits** de nombres.

**4.** ☠ Ne pas confondre évènements indépendants et incompatibles !

---

■ **Exercice 2.**
Soit $p \in ]0,1[$. Une pièce truquée donne `pile` avec probabilité $p$. On lance cette pièce une infinité de fois. Les lancers sont supposés mutuellement indépedants. On s'intéresse aux longueurs des lancers amenant une même face : on dit que la première série est de longueur $n \in \mathbf{N}^\star$ si :

— Les lancers 1,2,3,...,$n$ donnent le même côté de la pièce.

— Le $n+1$-ème lancer donne l'autre côté de la pièce.

On note $L_n$ l'évènement : «la première série est de longueur $n$». Calculer $P(L_n)$.

# 5 Notion de variable aléatoire sur un espace probabilisé

## A) Définition

■ **Définition 19** ............................................................ [Variable aléatoire]

Soit $(\Omega, \mathscr{T})$, un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire sur $\Omega$ toute *fonction* $X$ définie sur $\Omega$ telle que pour tout intervalle $I$ de $\mathbf{R}$, l'*ensemble* noté

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega \quad X(\omega) \in I\}$$

vérifie : $[X \in I] \in \mathscr{T}$, autrement dit $[X \in I]$ est un évènement.

■ **Remarque 9.**

1. Intérêt de cette notion : les valeurs prises par $X$ s'interprètent comme des mesures effectuées sur les observations. La définition garantit que les observations des valeurs prises par $X$ sont bien des évènements. Elles peuvent donc être analysées en termes de probabilités.
2. $[X \in I]$ **est une notation pour désigner un** **TYP ensemble** . $[X \in I]$, **n'est pas une** **TYP assertion** **exprimant une appartenance,** $[X = a]$ **n'est pas une égalité,** $[X > a]$ **n'est pas une inéquation, ni une inégalité.**

■ **Exercice 3.**
Traduire en langage probabiliste : **1.** $X = 2$, **2.** $[X = 2]$, **3.** $X \in [2, 5]$.

## B) Indépendance de variables aléatoires

■ **Définition 20** ........................................ [Variables aléatoires indépendantes]

1. Soit $n \geq 2$ un entier et $X_1, \ldots X_n$ $n$ variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. On dit que $X_1, \ldots X_n$ sont indépendantes si pour tous intervalles $I_1, \ldots, I_n$ de $\mathbf{R}$ :
les évènements $[X_1 \in I_1], \ldots [X_n \in I_n]$ sont indépendants.
2. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. On dit que la suite de variables $(X_k)$ est une suite de variables indépendantes si pour tout entier $n \geq 2$, et tout sous ensemble fini $\{i_1, \ldots, i_n\}$ de $n$ entiers strictement positifs, les variables $X_{i_1}, \ldots X_{i_n}$ sont indépendantes

## C) Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

■ **Définition 21** ...................................................... [Fonction de répartition]
Soit $X$ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. La fonction de répartition de $X$ est la fonction notée $F_X$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad F_X(t) = P(X \leq t)$$

■ **Proposition 3** .................... [Propriétés universelles des fonctions de répartition]
Une fonction de répartition vérifie les propriétés suivantes :

1. Elle est définie sur $\mathbf{R}$.
2. Elle est positive sur $\mathbf{R}$.
3. Elle est croissantes sur $\mathbf{R}$.
4. Elle admet des limites en $-\infty$ et en $+\infty$ égales respectivement à 0 et 1.