CH10 – Diagonalisation des matrices carrées

Plan du chapitre

Liste des définitions

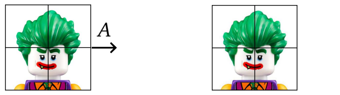
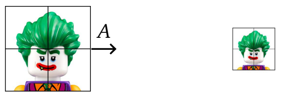
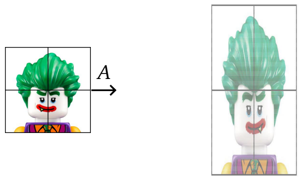
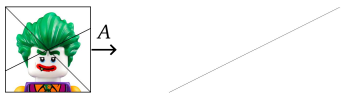
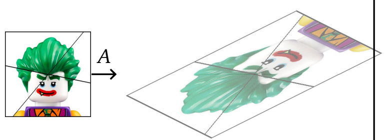
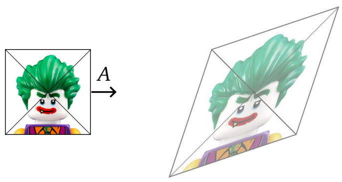
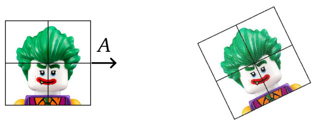
Liste des techniques de base

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. $\mathbf{T_0}$: technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.

2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

$n=2$	**Matrice A de taille 2 x 2**	**Action de A** sur $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$	**Spectre**	**Sev propres de A**
1.	$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$		$\{1\}$	$\mathscr{E}_1=\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$
2.	$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$		$\left\{\frac{1}{2}\right\}$	$\mathscr{E}_{\frac{1}{2}}=\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$
3.	$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$		$\{-1,2\}$	$\mathscr{E}_{-1}=\mathrm{Vect}\left((1,0)^{\mathsf{T}}\right)$, $\mathscr{E}_2=\mathrm{Vect}\left((0,1)^{\mathsf{T}}\right)$
4.	$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$		$\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$	$\mathscr{E}_0=\mathrm{Vect}\left((-1,1)^{\mathsf{T}}\right)$, $\mathscr{E}_{\frac{3}{2}}=\mathrm{Vect}\left((2,1)^{\mathsf{T}}\right)$
5.	$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$		$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$	$\mathscr{E}_{-\sqrt{2}}=\mathrm{Vect}\left((1,\frac{1+\sqrt{2}}{2})^{\mathsf{T}}\right)$ $\mathscr{E}_{\sqrt{2}}=\mathrm{Vect}\left((1,\frac{1-\sqrt{2}}{2})^{\mathsf{T}}\right)$
6.	$A=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$		$\{1,2\}$	$\mathscr{E}_1=\mathrm{Vect}\left((1,-1)^{\mathsf{T}}\right)$ $\mathscr{E}_2=\mathrm{Vect}\left((1,1)^{\mathsf{T}}\right)$
7.	$A=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\end{pmatrix}$		$\varnothing$	

- **Prérequis :** résolution des systèmes linéaires. Systèmes de Cramer. Rang.
- $n \geq 1$ est un entier fixé.
- Les colonnes seront notées par des lettres grasses pour vous aider à vous y retrouver.
- **Notation.** La matrice transposée d'une matrice M est notée $M^\top$ (la notation ${}^tM$ est désuette).

Bon à savoir

■ Théorème 1 .... [*Propriétés basiques de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$*]

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Oon note pour tout entier s$j \in \{1 \dots n\}$: $\mathbf{E}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i}^{\text{ème}}$,

1. La famille $\mathscr{B}_c = (\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n)$ est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
2. La dimension de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est n.
3. La matrice des coordonnées de $\mathbf{X}$ sur $\mathscr{B}_c$ est
4. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{Col}_j = A \times \mathbf{E}_j$ est la j-ème colonne de A.

■ Remarque 1.
Les espaces vectoriels $\mathbf{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ sont canoniquement isomorphes. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, l'application $f_A : \mathbf{X} \mapsto A\mathbf{X}$ définit un endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

1 Éléments propres d'une matrice carrée

A) Noyau d'une matrice

■ Définition 1 .... [Noyau d'une matrice M]
Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, le noyau de M noté $\ker M$ est l'ensemble des **colonnes** $\mathbf{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ solutions du système linéaire matriciel homogène $M\mathbf{X} = \mathbf{0}$ (ou sous forme réduite : $(M|\mathbf{0})$)

■ Remarque 2.
TYP Le noyau d'une matrice est constitué de colonnes.

■ Exercice 1.
Donner la description mathématique de l'ensemble $\ker M$.

■ Proposition 1 .... [Structure vectorielle et dimension]
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

1. $\ker M$ est un s-ev de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
2. $\dim \ker M + \mathrm{rg}(M) = n$.

En effet, $\ker M$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène d'inconnue $\mathbf{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

■ Exercice 2.
Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Donner le noyau de A.

CC BY NC SA

T1 **Calculer Ker M**

En général, on a affaire à des matrices M de petit format ($n \leq 4$),

1. le calcul du rang de M donne rapidement la dimension d de ker M (**prop.1**)
2. On peut chercher ensuite des combinaisons des colonnes $\mathbf{Col}_j$ de M nulles. En effet, mettons p.ex que l'on trouve une combinaison comme : $\mathbf{Col}_3 + 2\mathbf{Col}_2 - \mathbf{Col}_1 = \mathbf{0}$. Cela signifie (**Thm. 1**, point **4**).) que $M\mathbf{E}_3 + 2M\mathbf{E}_2 - M\mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$. Mais d'après le calcul matriciel cette dernière combinaison est aussi $M \times \underbrace{(\mathbf{E}_3 + 2\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)}_{\mathbf{U}}$. Donc $M\mathbf{U} = \mathbf{0}$
3. On en tire que **U** est dans ker M.
4. En trouvant d vecteurs libres par ce procédé, on obtient rapidement une base de Ker M. Sur une copie, on écrit quelque chose comme : «*Comme dim Ker $M = d$, il suffit d'en trouver d colonnes linéairement indépendantes pour obtenir une base de Ker M.*»

■ **Exercice 3.**

Trouver une base de ker M ou $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

B) Valeurs propres - vecteurs propres

■ **Définition 2** .... [valeur propre - vecteur propre - spectre d'une matrice carrée]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

1. On appelle valeur propre de A tout scalaire λ pour lequel la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
2. Toute solution **non nulle** du système linéaire homogène $(A - \lambda I_n|\mathbf{0})$ s'appelle vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
3. Le spectre de A est l'ensemble de ses valeurs propres. Il est noté $\sigma(A)$, ou $\mathrm{sp}(A)$, ou encore $\mathrm{spec}(A)$.

■ **Remarque 3.**

Par définition de système de Cramer, $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement existe une solution $\mathbf{X}$ non nulle au système linéaire de forme réduite $(A - \lambda I_n|\mathbf{0})$

■ **Définition 3** .... [Sous-espace propre associé à une valeur propre]

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \sigma(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par : $\mathscr{E}_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$ s'appelle sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

■ **Remarque 4.**

1. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est donc constitué de *tous* les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ.
2. Si on trouve une colonne $\mathbf{X}$ **non nulle** telle que $A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$, alors on peut affirmer que λ est valeur propre de A, et que $\mathbf{X}$ est un vecteur propre associé. Cas classique : sur chaque ligne de A, la somme des coefficients est toujours la même, mettons s. Alors s est une valeur propre de A et $\mathbf{X} = (1\dots1)^{\mathsf{T}}$ est vecteur propre associé.

■ **Exemple 1.**

Trouver une valeur propre de $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

 CC BY NC SA

■ **Proposition 2** .... [Structure vectorielle des sous-espaces propres]

1. $\mathscr{E}_\lambda$ est un s-ev de $\mathscr{M}_{n,1}(K)$ de dimension au moins 1
2. $\mathbf{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est dans $\mathscr{E}_\lambda$ si et seulement si $A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$.

T2 **Prouver que $\mathbf{X}$ est vecteur propre de A**

1. On s'assure que $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$.
2. On calcule $A\mathbf{X}$.
3. Si cette dernière colonne est proportionnelle à $\mathbf{X}$, cela permet de conclure, et on obtient si on ne le savait pas déjà que le coefficient de proportionnalité entre $\mathbf{AX}$ et $\mathbf{X}$ est une valeur propre de A.

C) Détermination du spectre

■ **Théorème 2** .... [*Obtention du spectre*]

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, et pour tout scalaire λ, notons $A_\lambda = A - \lambda I_n$. Alors :

1. λ est une valeur propre de A si et seulement si $\operatorname{rang}(A_\lambda) < n$.
2. Si $n = 2$, les valeurs propres de A sont les racines du trinôme $\lambda \mapsto P(\lambda) = \det(A_\lambda)$. En particulier A possède au plus deux valeurs propres distinctes.
3. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

■ **Exercice 4.**

1. Calculer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
2. Même question avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

■ **Corollaire 1** .... [*Spectre de la transposée*]

A et $A^\top$ ont les mêmes valeurs propres.

■ **Exemple 2.**

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ La somme des coeffs de chaque colonne de A fait 4. Ceci se traduit par $A^\top\mathbf{Y} = 4\mathbf{Y}$ où $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, 4 est vp. de $A^\top$. Par `Cor.1`, 4 est aussi vp de A.

CC BY NC SA

2 Étude des sous-espaces propres

A) Propriétés immédiates

■ **Proposition 3** .... [Propriétés des sev propres $\mathscr{E}_\lambda$]
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \sigma(A)$. Alors

1. $\mathscr{E}_\lambda$ est un sev de dimension au moins 1, et si $\lambda \notin \sigma(A)$, alors $\mathscr{E}_\lambda = \{\mathbf{0}\}$.
2. a) $A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \iff \mathbf{X} \in \mathscr{E}_\lambda$ ($\mathbf{X}$: colonne !)
   b) $\begin{cases} A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \\ \mathbf{X} \neq \mathbf{0} \end{cases} \iff$ $\mathbf{X}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ
3. Le noyau de A est $\mathscr{E}_0$, et donc A n'est pas inversible si et seulement si $0 \in \sigma(A)$.
4. ⋆⋆⋆ $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) + \dim(\mathscr{E}_\lambda) = n$. En particulier, dim $\mathscr{E}_\lambda$ vaut le nombre de variables libres du système linéaire homogène de forme réduite $(A - \lambda I_n | \mathbf{0})$
5. $\mathbf{X} \in \mathscr{E}_\lambda \Rightarrow \forall k \in \mathbf{N} \quad A^k\mathbf{X} = \lambda^k\mathbf{X}$. En particulier : $X \in \mathscr{E}_\lambda \Rightarrow AX \in \mathscr{E}_\lambda$

B) Valeurs propres et indépendance linéaire

■ **Corollaire 2** .... [*Intersection des sous-espaces propres*]
Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes n'ont que le vecteur nul comme vecteur en commun.

■ **Corollaire 3** .... [*Sert dans tous les exercices*]
En juxtaposant des bases (ou simplement des familles libres) de sous-espaces propres deux à deux distincts d'une matrice, on obtient encore une famille de colonnes libre.

■ **Corollaire 4** .... [*Somme des dimensions*]
La somme des dimensions des sous-espaces propres d'une matrice $n \times n$ ne peut dépasser n.

■ **Remarque 5.**
en effet, les bases d'un sev sont les familles libres de ce sev de plus grand cardinal.

■ **Corollaire 5** .... [*Nombre maximal de vp distinctes*]
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors A possède au plus n valeurs propres distinctes.

3 Diagonalisation des matrices carrées

A) Rappel sur les matrices semblables

■ **Définition 4** .... [Matrices semblables]
Soit A et P deux matrices carrées de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ($n \geq 1$). On dit que A et B sont semblables si il existe une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ **inversible** telle que $P^{-1}AP = B$.

■ **Remarque 6.**
Il n'est pas spécilement facile de prouver que deux matrices données sont semblables en général, car la propriété « être semblable à» est existentielle.

■ **Exercice 5.**
Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, et $\alpha \in \mathbf{K}$. Trouver toutes les matrices semblables à αI_n.

CC BY NC SA

B) Matrice diagonalisable

■ **Définition 5** .... [Diagonalisabilité]

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale :

$$\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ inversible t.q } P^{-1}AP \text{ est diagonale.}$$

■ **Exemple 3.**
Toute matrice diagonale D est diagonalisable. En effet, en prenant $P = I_n$, qui est inversible, on a : $P^{-1}DP = D$: D est semblable à elle-même, qui est diagonale.

■ **Remarque 7.**
Une matrice A ne possédant qu'une seule valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si A est semblable à λI_n. Or d'après l'exercice 5, la seule matrice semblable à λI_n est λI_n. D'où : A est diagonalisable à une seule valeur propre ssi A est diagonale.

C) Critères de diagonalisabilité

■ **Théorème 3** .... [*Condition nécessaire* ***et*** *suffisante de la diagonalisabilité*]

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sont équivalents :

1. A est diagonalisbale.

2. La somme des dimensions des sev propres de A vaut au moins n.

3. La somme des dimensions des sev propres de A vaut n.

■ **Corollaire 6** .... [*Condition suffisante de diagonalisabilité*]
Si$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet exactement n valeurs propres distinctes alors :

1. A est diagonalisable.

2. Les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

■ **Remarque 8.**
Dans tous les cas, on obtient une matrice P inversible diagonalisant A en juxtaposant des bases de chaque s-ev propre de A.

■ **Théorème 4** .... [*Théorème spectral*]
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique **réelle** (c-à-d $A^\top = A$) alors :

1. A est diagonalisable.

2. Les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

■ **Remarque 9.**

1. En juxtaposant des bases **orthonormées de chaque sous-espace propre**, on obtient une matrice $P_\star$ diagonalisant A. La matrice $P_\star$ vérifie donc **dans ce cas particulier** :

$$\begin{cases} P_\star^{-1} & = & P_\star^\top \\ P_\star^{-1}AP_\star & \text{est} & \text{diagonale} \end{cases}$$

2. ☠ Attention, même si A est symétrique, la matrice P obtenue par juxtaposition de bases de chaque sous-espace propre **ne vérifie pas** $P^{-1} = P^\top$. Pour cela, **il faut s'assurer** que l'on a choisi **dans chaque sous-espace propre** des bases **orthonormées**.

■ **Exercice 6.**

Diagonaliser si c'est possible $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

🅭🅯🄏🄎

T3 Calculer le rang d'une matrice 3×3

Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, et si on a par pivot partiel :

$$M \sim \left(\begin{array}{c|cc} \alpha & * & * \\ \hline 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\text{B}} \end{array}\right),$$

alors $\text{rg}(\text{M}) = \text{rg}((\alpha)) + \text{rg}(B)$. Or, le rang de la matrice (α) est 1 ssi $\alpha \neq 0$ (et 0 sinon), tandis que le rang de B est 2 ssi son déterminant est non nul (puisque B est de taille 2×2). En particulier, si $\alpha \neq 0$, $\text{rg}(M) < 3$ ssi $\det B = 0$.

T4 Comment diagonaliser une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

1. On commence calculer le spectre de A., c-à-d. par rechercher les valeurs propres de A. Il y en a qui sont évidentes parfois. Notamment :
   — Si $\text{rg}(A) < n$, 0 est valeur propre de A. (**prop. 3**,**3.**).
   — Si la somme des coefficients des lignes (ou des colonnes) de A sont toutes égales, cette somme est une valeur propre en introduisant la colonne $\mathbf{U} = (1\dots1)^\mathsf{T}$.
   — Si l'énoncé nous en a fait calculer ou suggérer, il n'est peut-être pas nécessaire de se lancer dans le déploiement complet de la méthode (par exemple une colonne $\mathbf{X}$ introduite dans l'énoncé est peut-être un vecteur propre. En calculant $A\mathbf{X}$, on peut obtenir une valeur propre, et $\mathbf{X}$ est un vecteur propre associé !).
2. **a)** Si on a remarqué que A est symétrique réelle, on peut affirmer qu'elle est diagonalisable.
   b) Si A possède n valeurs propres distinctes, alors on peut affirmer que A est diagonalisable (**Cor. 6**) et même que les sev propres sont tous de dimension 1.
   c) Si la somme des dimensions des sev-propres est $\geq n$, diagonalisable. Exemple : A est une matrice 3×3. On détecté deux valeurs propres α, β, et $A - \beta I_3$ est de rang 1.
   d) Si la somme des dimensions des sev-propres est $< n$, on peut affirmer que A n'est pas diagonalisable.
3. Si A est diagonalisable, pour chaque valeur propre λ de A : On calcule une base $\mathcal{B}_\lambda$ du sev propre $\mathcal{E}_\lambda$ associé en remontrant le système $(A - \lambda I_n|\mathbf{0})$, ou avec **T1 qu'on peut même appliquer sur $A - \lambda I_n$ échelonnée si on n'a pas modifié l'ordre des colonnes durant le pivot**.
4. En juxtaposant les $\mathcal{B}_\lambda$ dans une matrice P, on obtient une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale (il est inutile de calculer P^{-1}, ni de calculer le produit $P^{-1}AP$). La diagonale est remplie avec les λ dans le même ordre que celui dans lequel les bases $\mathcal{B}_\lambda$ on été juxtaposées. Chaque λ est répété sur la diagonale dim $\mathcal{E}_\lambda$ fois.

CC BY NC SA

4 Applications de la diagonalisation

A) Méthode générale

T_5 Établir un résultat pour une matrice diagonalisable

Si on cherche à établir un résultat (R) relatif à une matrice A donnée :

1. On établit d'abord le résultat (R) pour une matrice D diagonale quelconque au lieu de A.
2. On diagonalise A en une matrice D à travers une matrice P. Ou alors, si les calculs ne sont pas demandés, on se contente de prouver que A est diagonalisable.
3. On déduit ensuite le résultat (R) pour la matrice A en passant par D grâce à la relation $A = PDP^{-1}$

Cette technique est appliquée dans les 4 applications qui suivent.

Exemple 4.
La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $P^{-1}AP = D$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

B) Application 1 : calcul des puissances d'une matrice

Exemple 5.
À savoir faire. Calcul de A^m où $m \in \mathbf{N}$.

1. On calcule d'abord D^m pour toute matrice D diagonale (ce qui est facile).
2. On diagonalise A à travers P, de sorte que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. On montre par récurrence que $D^m = P^{-1}A^mP$.
4. On revient au problème initial par : $A^m = PD^mP^{-1}$.

Exercice 7.
Calculer A^n pour tout entier n, où A est la matrice l'exemple 4.

C) Application 2 : Résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Même principe pour un système différentiel :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{X} \quad \mathbf{X}(t) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}).$$

1. On résout d'abord $\mathbf{Y}' = D\mathbf{Y}$ (inconnue : $\mathbf{Y}$), où D est diagonale. Ce qui est facile.
2. On diagonalise A qui est alors semblable à D qui est une matrice diagonale.
3. On revient au problème initial en sandwichant par P, P^{-1} convenablement : la dernière équation équivaut à $P\mathbf{Y}' = PDP^{-1}P\mathbf{Y}$, et après avoir vérifié que $P\mathbf{Y}' = (P\mathbf{Y})'$, les solutions sont les $\mathbf{X} = P\mathbf{Y}$, où $\mathbf{Y}$ sont les solutions du problème **1.**. Noter que le calcul de P^{-1} n'est jamais utile ici !

Exercice 8.
Trouver les fonction $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ définies sur $\mathbf{R}$ telles que :

$$\begin{cases} x' &= 3x - 2y \\ y' &= 4x - 3y \end{cases}$$

D) Application 3 : recherche des matrices commutant avec une matrice donnée

■ Exercice 9.
Trouver toutes les matrices qui commutent avec la matrice A de l'exemple 4.

■ Exemple 6.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Si on cherche les matrices carrées M telles que $AM = MA$:

1. On résout à la main par calcul $ND = DN$ (inconnue : N) pour une matrice diagonale D.
2. On cherche (si possible) une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. On revient au problème initial en sandwichant par P, P^{-1} convenablement :

$$\begin{aligned} DN = ND &\iff PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \\ &\iff \quad AM = MA \quad \text{où } M = PNP^{-1}. \end{aligned}$$

Les solutions de $AM = MA$ sont donc les matrices $M = PNP^{-1}$ où N sont les solutions du problème **1.**.

E) Application 4 : Désentrelacement de suites linéairement couplées

■ Exercice 10.
Calculer explicitement les termes généraux des suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 3u_n - 2v_n \\ v_{n+1} & = & 4u_n - 3v_n \end{array} \right.$$

CC BY-NC-SA