CH11 – Variables aléatoires discrètes

Plan du chapitre

Liste des définitions

Liste des techniques de base

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. **T_0** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

1 Variable aléatoire discrète

A) Notions de base

Remarque 1.
Les variables aléatoires finies (1ère année) sont un cas particulier de variables aléatoires discrètes.

Définition 1 .... [V.A.R. discrète]
Toute variable aléatoire X telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

Remarque 2.
On peut donc indexer les éléments de $X(\Omega)$ sur un ensemble d'entiers :
$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad n \in I\}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$.

Exemple 1.

1. Les VAR définies sur un EPF sont des VAR discrètes (*cf.* Cours de première année.)
2. Si X est la VAR définie pour $k \in \mathbf{N}^\star$ par : $P\left(X = \frac{1}{k}\right) = \frac{6}{\pi^2 k^2}$, X est une VAR discrète (ici $x_n = 1/n$, et $n \in I = \mathbf{N}^\star$).
3. Les variables à densité **ne sont pas** des VAR discrètes.

Théorème 1 .... [S.Q.C.E *associé à une V.A.R. discrète*]
Si X est une VAR discrète et $X(\Omega) = \{x_n\}_{n\in I}$, [a] alors les évènements $[X = x_n]$ pour n décrivant I forment un SQCE appelé système quasi-complet d'évènements associé à X.

a. Souvent $I = \mathbf{N}$, ou $I = \mathbf{N}^\star$ ou encore $I = \mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, et $x_n = n$.

Définition 2 .... [Loi d'une var discrète]
Si X est une VAR discrète d'espace image $X(\Omega) = \{x_n\}_{n\in I}$, la fonction définie sur $X(\Omega)$ par $p(x_k) = P(X = x_k)$ est une fonction de masse induisant une mesure de probabilité sur $X(\Omega)$ appelée loi de la variable X.

Exemple 2.
À quelle condition sur α on définit une variable aléatoire X sur $\Omega = \mathbf{N}^\star$ en posant $P(X = k) = \frac{\alpha}{k(k+1)}$ pour $k \in \mathbf{N}^\star$?

2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Remarque 3.
Les propriétés universelles des fonctions de répartition sont vérifiées À savoir : positivité, croissance, limites en $\pm\infty$.

A) Propriétés

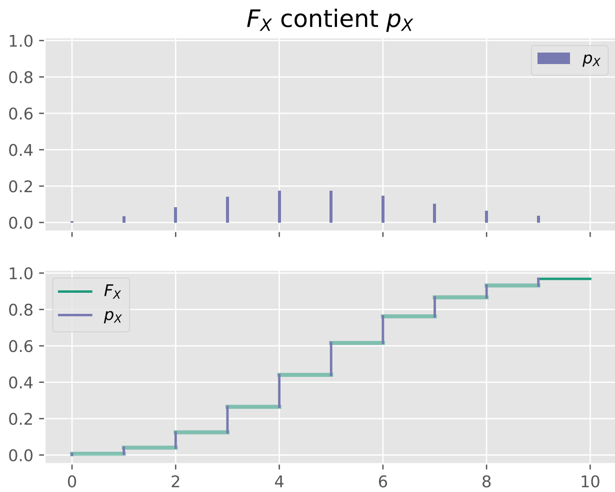
Proposition 1 .... [Propriétés des fonctions de répartition de VAR discrètes]
Notons $X(\Omega) = \{x_n\}_{n\in I}$. Pour tout réel t :

1. $F_X(t) = \sum\limits_{\substack{n\in I\\ x_n \leq t}} P(X = x_n)$.
2. En particulier, si $X(\Omega) = \mathbf{N}$:
   a) $F_X(t) = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P(X = k)$.
   b) Pour $k > 0$:
   $P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$.

■ Remarque 4.
De façon générale, si on peut ordonner en une suite strictement croissante les éléments de $X(\Omega) = x_1 < x_2 < \cdots < x_n \ldots$, il est vrai que $P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$ en convenant que $F(x_0) = 0$.

B) Obtention de la loi par la fonction de répartition

■ Théorème 2 ....[*La fonction de répartition contient la loi*]
La loi de X est déterminée par F_X. En particulier, si deux variables ont même fonction de répartition, elles ont même loi.



L'amplitude de la discontinuité de F_X au point x_k vaut $P(X = x_k)$.

T₁ Quand calculer F_Y pour obtenir la loi de Y ?

1. Typiquement pour calculer loi d'un maximum, c'est-à-dire, si $Y = \max(X_1, X_2)$. En effet, on part de :
$$\forall t \in \mathbf{R} \quad [\max(X_1, X_2) \leq t] = [X_1 \leq t] \cap [X_2 \leq t].$$
Ce qui permet de calculer $F_Y(t)$ en passant aux probas. Souvent X_1, X_2 sont indépendantes, ce qui permet de simplifier le calcul..
2. Ensuite on obtient la loi de X par **prop. 2**
3. Dans le cas d'un mininum, on utilise plutôt la *fonction de survie* $S_Y : t \mapsto P(Y > t) = 1 - F_Y(t)$, et on part de :
$$\forall t \in \mathbf{R} \quad [\min(X_1, X_2) > t] = [X_1 > t] \cap [X_2 > t].$$
4. Le raisonnement et le calcul sont identiques pour un maximum (ou minimum) d'un nombre fini n de variables aléatoires, puisque si $t \in \mathbf{R}$:
$$[\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq t] = [X_1 \leq t] \cap [X_2 \leq t] \cap \cdots \cap [X_n \leq t].$$

.

T₂ **Comment calculer la loi d'une VAR Y donnée ?**

1. Essayer de reconnaître une loi usuelle (cf.**T4**, par exemple).
2. On peut essayer de relier Y à une VAR X qui suit une loi usuelle. Il faut alors être soigneux sur la détermination de l'espace image de Y en fonction de celui de X.

   3a. Déterminer l'espace image $Y(\Omega)$

   — On justifie que les valeurs extrêmes de Y sont observables (c'est assez facile).

   — On ajoute que les cas intermédiaires sont possibles.

   3b. On calcule $P(Y=k)$ pour $k \in Y(\Omega)$ avec **T7**. **CH9**

3 Lois usuelles de première année

A) Rappels terminologiques

■ **Définition 3** .... [Épreuve de Bernoulli - succès - paramètre de succès]
Expérience aléatoire à l'issue de laquelle il n'y a que **deux** observations possibles. L'une de ces observations (privilégiée dans le contexte de l'expérience) s'appelle succès. La probabilité d'observer le succès s'appelle paramètre de succès de l'épreuve.

■ **Définition 4** .... [Schéma de Bernoulli - paramètres du schéma]
Répétitions (finies ou infinies) *mutuellement indépendantes* d'une même épreuve de Bernoulli p. Si les répétitions sont en nombre fini N, le couple (N,p) s'appelle paramètres du schéma.

B) Lois usuelles de première année

Données. Une urne U contient $n \geq 1$ boules numérotées de 1 à n est indistingables au toucher, et une proportion p de ces boules est blanche, et on pose $q = 1-p$.

Expérience	**Mesure**	**Loi de** X	$X(\Omega)=$	$P(X=k)=$ $(k\in\Omega)$	$E(X)$	$V(X)$
1. On tire λ boules au hasard successivement avec remise	X compte le nombre de boules tirées	$X \rightsquigarrow \mathscr{C}(\lambda)$	$\{\lambda\}$	$P(X=\lambda)=1$	λ	0
2. On tire 1 une boule au hasard	X vaut 0 si la couleur observée est noire, 1 sinon	$X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$	$\{0,1\}$	$P(X=0)=p$ $P(X=1)=q$	p	pq
3. On tire 1 boule au hasard	X mesure le numéro de la boule tirée	$X \rightsquigarrow \mathscr{U}(n)$	$\{1\dots n\}$	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
4. On tire successivement avec remise N boules	X mesure le nombre de boules blanches tirées	$X \rightsquigarrow \mathscr{B}(N,p)$	$\{0\dots N\}$	$P(X=k) = \binom{n}{k}p^kq^{N-k}$	Np	Npq

4 Loi géométrique sur $\mathbf{N}^\star$

A) Définition

■ Définition 5 .... [Loi géométrique $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$]

On dit que X suit une loi géométrique (sur $\mathbf{N}^\star$) de paramètre $p \in]0,1[$ si :

1. $X(\Omega) \subset \mathbf{N}^\star$.
2. $\forall k \in \mathbf{N}^\star$ $P(X=k) = pq^{k-1}$ (où $q = 1-p$).

Dans ce cas on note $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$

■ Remarque 5.

1. La loi géométrique est la loi du nombre d'essais effectués pour obtenir le premier succès lors de répétitions **mutuellement indépendantes** d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.
2. Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$, la variable $Y = X-1$ qui compte donc le nombre d'échecs avant le premier succès. On a donc $Y(\Omega) = \mathbf{N}$ et $P(Y=k) = pq^k$.

B) Fonction de répartition

■ Proposition 2 .... [Fonction de répartition de la loi $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$]

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$, pour tout réel t :

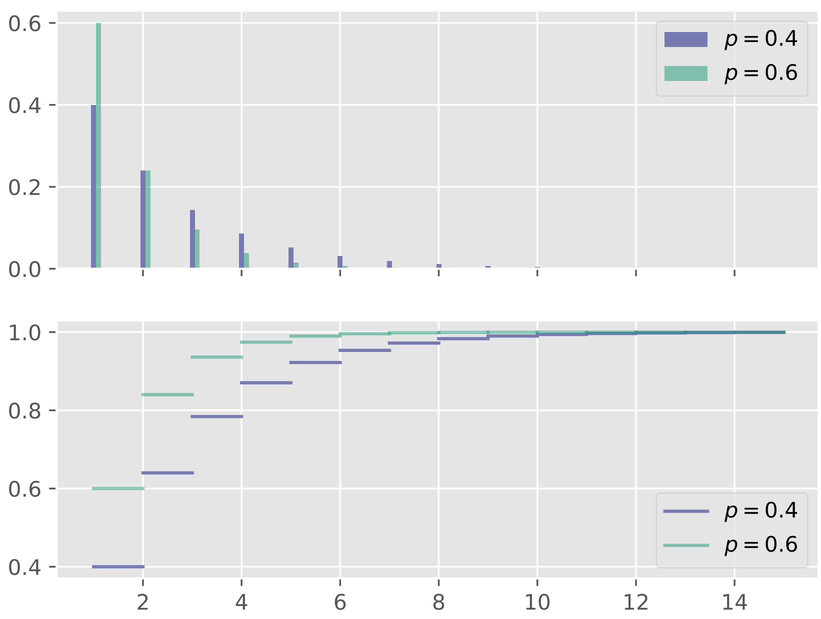
$$F_X(t) = \left| \begin{array}{ll} 1-q^{\lfloor t \rfloor} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

en notant $q = 1-p$

C) Graphique

Lois $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$

Fonction de masse



Fonction de répartition

D) Moments

■ Théorème 3 .... [*Moments de la loi* $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$]

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$ alors X admet espérance et variance et :

1. $E(X) = \dfrac{1}{p}$.
2. $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

■ Remarque 6.

En moyenne, le premier succés apparaît à un rang d'ordre $\dfrac{1}{p}$.

■ Exercice 1.

Soit X, Y *deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique sur* $\mathbf{N}^\star$ *de paramètres respectifs* p, p'. *Calculer la loi de* $Z = \min(X, Y)$.

E) Simulation

```python
def geom(p):
    k = 1
    while random()>p: # Ce booléen vaut False avec probabilité p
        k+=1
    return k
```

T3 Prouver qu'une VAR X suit une loi binomiale ou géométrique

1. Dans les deux cas, on commence par Identifier une épreuve de Bernoulli (E), son succès et son paramètre de succès p.
2. On précise que l'expérience liée à Y consiste en répétitions **mutuellement indépendantes** de (E). La suite de l'argumentation diffère suivant la loi qui nous intéresse :
   a. Si X compte le **nombre de succès** observés sur un nombre N **fini** de répétitions de (E) : $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(N, p)$
   b. Si X mesure le **temps d'apparition** du 1er succès en répétant (E), alors : $X \rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$

F) Propriétés complémentaires

■ Proposition 3 .... [Absence de mémoire de la loi géométrique]

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$ alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad \forall k \in \mathbf{N}^\star \quad P(X > n + k | X > n) = P(X > k)$$

■ Remarque 7.

Interprétation : savoir qu'on a déjà fait n essais ne donne aucune information supplémentaire sur le fait d'obtenir un succès k essais plus tard, puisque la relation de la proposition s'écrit :

$$\forall n \geq 0 \quad P_{X>n}(X > n + k) = P_{X>0}(X > 0 + k)$$

5 Loi de Poisson

A) Définition

■ Définition 6 .... [Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$]

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :

1. $X(\Omega) \subset \mathbf{N}$.
2. $\forall k \in \mathbf{N} \quad P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Dans ce cas on note $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

■ Remarque 8.

1. La loi de Poisson est appelée la loi des évènements rares. En effet : elle compte approximativement le nombre de succès lors d'un grand nombre de répétitions d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes à faible paramètre de succès (une $\mathscr{B}(n,p)$ avec p petit et n grand).
2. Il n'existe pas d'expérience simple (du style : tirage dans une urne) attachée à une variable aléatoire qui suivrait une loi de Poisson.
3. Néanmoins, conformément au point **1.**, par exemple :
   a) Le nombre d'accidents d'avion ayant eu lieu une année sur tous les vols peut être modélisé par une VAR de Poisson.
   b) Le nombre de personnes nées le même jour dans le lycée aussi.

■ Exercice 2.

1. Proposer une expérience de tirage de boule dans une urne liée à une variable de loi $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^*}(p)$.
2. Compléter le tableau du **3.B)** en ajoutant une ligne dédiée à la loi géométrique.

■ Exercice 3.

1. Exprimer sous forme de somme de série le réel $S_\lambda = e^{\lambda} + e^{-\lambda}$ (on simplifiera au maximum la somme obtenue).
2. Soit $\lambda > 0$ et $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$.
   a) Soit A l'évènement : «la valeur observée de X est paire». Exprimer A en termes de X.
   b) Calculer $P(A)$.

B) Fonction de répartition

■ Proposition 4 .... [Fonction de répartition de la loi $\mathscr{P}(\lambda)$]

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ alors pour tout réel t :

$$F_X(t) = \left| \begin{array}{ll} e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor}\frac{\lambda^k}{k!} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

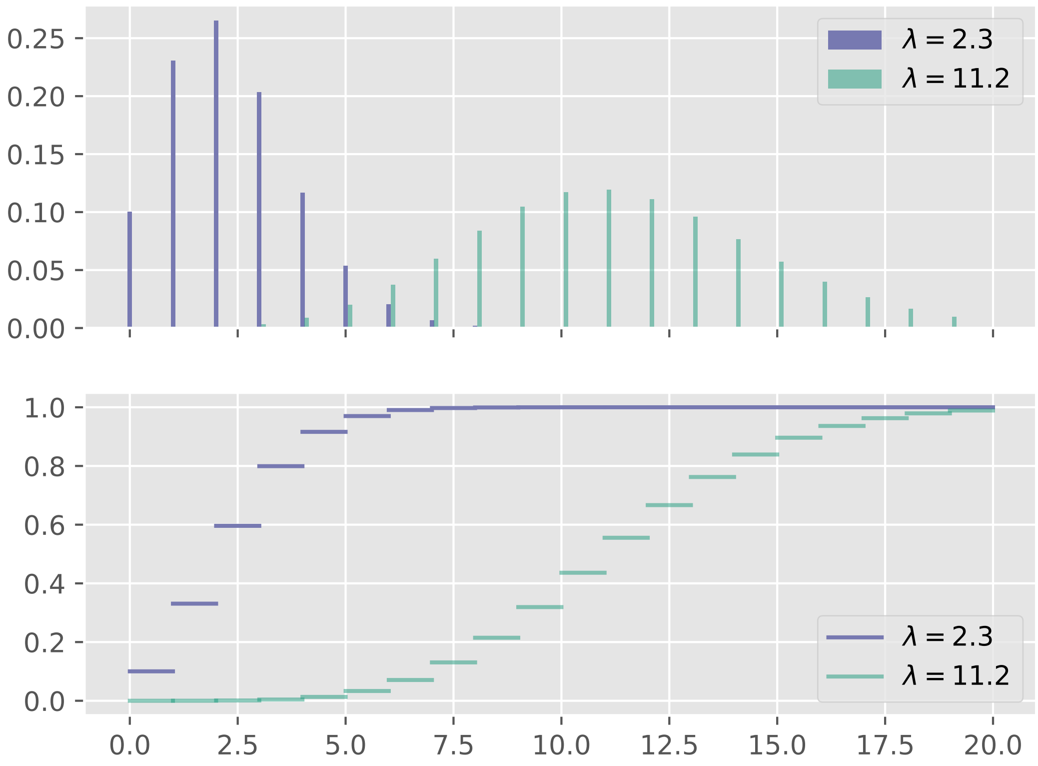
■ Remarque 9.

Contrairement au cas de la loi géométrique, la fonction de répartition de la loi de Poisson n'a pas d'expression simple.

C) Graphique

Lois de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$

Fonction de masse



Fonction de répartition

■ **Remarque 10.**
On peut remarquer que la fonction de masse se concentre autour des valeurs de k de qui sont de l'ordre de λ (à cause des croissances comparées).

D) Moments

■ **Proposition 5** .... [Moments de la loi $\mathscr{P}(\lambda)$]

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ alors X admet espérance et variance et :

1. $E(X) = \lambda$.
2. $V(X) = \lambda$.

E) Simulation

Principe. Voir partie suivante.

```python
from random import random
from numpy import exp
def Poisson(lambada):
    k=0
    p = exp(-lambada)  # Initialisation  p_0
    S = p              # F_X(k)
```

```
7        r = random()
8        while r>S:
9            k+=1
10           p*=lambada/k
11           S+=p            # F_X(k+1)
12       return k
```

- Ligne 3 (*cf.* **Rem.1**) : on ne peut pas donner la fonction de masse en variable d'entrée. On calcule les p_k au fur et à mesure (ligne 10).
- ligne 10 : pour cela, on utilise le fait que la fonction de masse $k \mapsto p_k$ vérifie : $p_0 = e^{-\lambda}$ (ligne 5) et $\forall k \in \mathbb{N}^\star \quad p_k = p_{k-1} \times \dfrac{\lambda}{k}$.

■ Remarque 11.

On peut aussi simplement simuler une loi binomiale de paramètres $N = 100$, $p = \dfrac{\lambda}{100}$, qui donne une bonne approximation de la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ d'après les théorèmes limite.

6 Simulation informatique d'une variable aléatoire discrète

A) Qu'est-ce que simuler une variable aléatoire discrète ?

■ Définition 7 .... [Simulation d'une variable aléatoire]

Si X est variable aléatoire d'espace image $X(\Omega) = \{x_i \quad i \in I\}$, simuler X, c'est écrire une fonction `f` telle que sur un grand nombre d'appels `N` de `f` (disons `N`≥ 100), `f` renvoie pour tout $i \in I$ la valeur `x[i]` avec une fréquence acceptablement proche de $P(X = x_i)$.

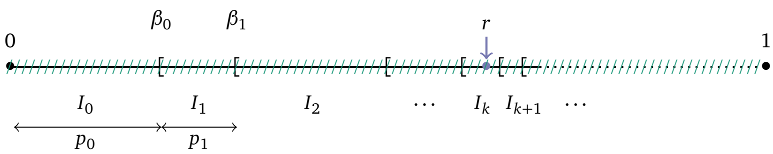
■ Remarque 12.

Autrement dit, les valeurs observées à l'écran de `f` suivent la loi de X, ou dit autrement, se distribuent suivant la loi de X.

B) Principe

Soit X une VAR discrète notons $X(\Omega) = \{x_0 < x_1 < \ldots, x_n < \ldots\}$ son espace image et posons $p_k = P(X = x_k)$.

1. Comme la série $\sum\limits_{k \geq 0} p_k$ converge et que sa somme vaut 1, on peut partitionner l'intervalle $[0,1[$ en intervalles de I_k de longueur p_k comme sur la figure.
2. On tire un flottant r au hasard dans $[0,1[$ (on a représenté sur le dessin un grand nombre de tirages suivant une loi $\mathscr{U}(0,1)$).
3. *Simulation de X* : comme la proportion de flottants r tombant dans I_k sur un grand nombre de tirages (dessinés en hachures) est environ p_k, on décrète que si r tombe dans I_k, la valeur observée de X est alors x_k.



Noter que $\beta_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k = F_X(x_n)$

C) Implémentation

Code Python ▼

```
1  def simul(x,p)
2      """
3      entrées (listes de flottants)
4      x = [x0,...] : X(Omega)
5      p = [p0,...] : fonc. de masse
6      sortie : une réalisation de X
7      """
8      k=0
9      p = p[0]
10     S = p
11     r = random()
12     while r>S:
13         k+=1
14         S+=p[k]
15     return x[k]
```

■ Remarque 13.
Commentaires sur le script

- Ligne 1 : Si la VAR X prend un nombre **fini** de valeurs, la donnée exhaustive de la fonction de masse `p` en variable d'entrée de `simul(x,p)` est possible (voir **Exple. 1**).
- Lignes 12-14 : Sinon, on essaie dans la boucle `while` de calculer les nombres `p[k]` par récurrence (voir la simulation de la loi de Poisson en III E)).

■ Exemple 3.
Simulation de $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(2, 1/3)$:

```
t = 1/3               # paramètres de la loi binomiale
s = 1-t
x = [0,1,2]           # espace  image de
p = [t**2,2*t*s,s**2] # loi de X
simul(x,p)
```

7 Moments des variables aléatoires discrètes

A) Moment d'ordre r d'une variable aléatoire

■ Définition 8 .... [Moment d'ordre r : $M_{X,r}$]
La VAR X admet un moment d'ordre r si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x)$ est absolument convergente, c'est-à-dire si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} |x|^r P(X = x)$ est convergente. On pose alors :

$$M_{X,r} = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x).$$

■ Proposition 6 .... [Existence de moments]

Soit $r \in \mathbf{N}^\star$. Si X admet un moment d'ordre r, alors tous les moments d'ordre inférieur existent aussi.

B) Espérance d'une variable aléatoire discrète

■ Définition 9 .... [Espérance]
La VAR X adme une espérance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 1 $M_{X,1}$, et dans ce cas

$$E(X) = M_{X,1} = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

Proposition 7 .... [Propriétés fonctionnelles de l'espérance]
L'ensemble des VAR discrètes sur Ω admettant un moment d'ordre 1 est un espace vectoriel et l'espérance y est une forme linéaire positive et croissante. Précisément :

1. Si X, Y sont deux VAR discrètes sur Ω admettant une espérance, alors pour tous réels λ, μ, la variable $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et :
$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$
En particulier :
$$E(\lambda X + \mu) = \lambda E(X) + \mu.$$
2. Si X est à valeurs positives quasi-certainement, $E(X) \geq 0$.
3. Si $X \leq Y$: $E(X) \leq E(Y)$.
4. Les grandeurs X et $E(X)$ sont dans les mêmes unités.
5. Si X possède une espérance, la variable notée $X - E(X)$, appelée variable centrée déduite de X, possède aussi une espérance, et celle-ci est nulle.

Théorème 4 .... [*Formule de transfert*]
Soit f une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$, et Y la VAR donée par $Y = f(X)$. Alors Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)| P(X = x)$ converge **absolument** et dans ce cas :
$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

T4 **À quoi sert la formule de transfert ?**

si Y s'exprime en termes d'une VAR X, mettons $Y = f(X)$, et de loi connue, le **thm. 4** nous donne le calcul de $E(Y)$ à l'aide de la loi de X sans connaître celle de Y.

T5 **Comment calculer l'espérance d'une VAR Y ?**

1. Si on reconnaît une loi usuelle, $E(Y)$ est obtenu sans calculs.
2. Si Y est une transformée affine d'une VAR X dont on connaît l'espérance $Y = aX + b$, on utilise **prop.7 1.**
3. Sinon, **T4.**, et les techniques d'étude de convergence des séries à terme positifs (en cas de séries !).

C) Variance. Écart-type

Proposition 8 .... [Existence de la variance et du moment d'ordre 2]
Soit X une VARD Sont équivalents :

1. X admet une variance.
2. X admet un moment d'ordre 2.

■ **Définition 10** .... [Variance - écart-type]

1. La variance de X est définie sous réserve d'existence par :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

2. L'écart-type de X, noté σ_X est défini alors par

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

■ **Proposition 9** .... [Propriétés fonctionnelles de la variance]

1. (*Positivité*). $V(X) \geq 0$.
2. (*Homogénéité*.) Si X est exprimée en unités u, $V(X)$ est en unité u^2, et σ_X en unités u.
3. (*Homogénité et invariance par translation*). Si a, b sont deux réels, $aX + b$ admet une variance et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

4. $V(X) = 0$ si et seulement si X suit une loi quasi-certaine.

T6 **Prouver l'existence de la variance**

1. Si l'énoncé de demande de prouver l'existence de l'espérance et de la variance, on peut prouver seulement l'existence du moment d'ordre 2 et conclure avec **prop. 6** et **déf. 9**
2. Par contraposition de **prop. 6** : si le moment d'ordre 1 n'existe pas, cela prouve que la V.A.R. n'a ni espérance, ni variance.

■ **Théorème 5** .... [*Formule de Koenig*]
Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. Si X admet une variance, alors X admet un moment d'ordre 2, une espérance et :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

T7 **Calculer la variance d'une VAR Y**

1. Si on reconnaît une loi usuelle, $V(Y)$ est obtenu sans calculs
2. Si Y est une transformée affine d'une VAR X dont on connaît la variance, $Y = aX + b$, on utilise **prop.9 3.**
3. Sinon, on applique **Thm. 5**.
