CH7 – Espaces vectoriels

= ensemble dans lequel on peut faire des Combinaisons linéaires

ULTRA IMPORTANT

Plan du chapitre

Liste des définitions

Liste des techniques de base

VITAL

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques
54	1.	T_7	Hyp facile X = fonction	
	2.	T_4+T_7	Rem 1. 37	
	3.	T_7+T_5		
59 60	1	Déf		
	2	T_0 savoir résoudre un système	Calcul du rang (par pivot)	
	3			
62		$\underbrace{T_4 \text{ 1?}}_{T_0}$	Exemples dans le cours	
66				

1. **T_0** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

Exo66 E : poreq $E \subset C^\infty(\mathbb{R})$ T_1, T_2

Méthode 1 choisie dans exo 10

- résoudre l'éq. définissant E : donne une représentation param de E
- Permet de mettre E sous forme de Vect : prouve que E est un ev.
- donne une famille génératrice de E : base possible

méthode2 exo 10.

Rem : E est poreq → on peut prouver que E est un sev par déf 1 : perte de temps ici car on demande de toute façon une base de E

→ réf : exo 10. q1.

Pour prouver que la famille gén. trouvée est libre : argument de croissances comparées.

T_7 réf : exemple 3.37.

Exo 67 T_1, T_2 (toujours)

1- $T_7.1$ pour prouver "libres" + argument cardinal pour prouver "base" $T_8.1$

ou

T_9 → écrire la matrice A de $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$ sur $\mathcal{B}_c$ (déf 12)

→ Calculer $rg(A)$

→ conclure avec thm 7

Si on montre que A est inversible cela prouve que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

↳ dans ce cas A est rebaptisée matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{F}$.

2- Appliquer thm 8 (exemple : exemple 10 du cours)

69. Rem : $T_1 + T_2$: seul exemple vu dans un ev de matrices.

Rappel : - $M_2(\mathbb{R})$ est une notation pour $M_{2,2}(\mathbb{R})$
- $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$ (cf I)

1 - $T_7.1$ + $T_8.1$ Comme en 67
2 - Thm 8. Soyez scrupuleux dans l'application de def 11, def 12 :

T_1, T_2 : Vecteur = matrice 2×2
Coordonnées d'un vecteur sur la base $\underbrace{(A, B, C, D)}$
= colonne à $\boxed{4}$ lignes

4 vecteurs dans la base

$$X = P\underline{X'} \longrightarrow X' = P^{-1}X$$

$$\downarrow$$

$$(P \mid X) \longrightarrow \text{résoudre}$$

Exo 66

$$E = \left\{ \underbrace{Ae^{2t} + Be^{-2t}}_{\text{abus d'écriture : pas une fonction c'est un réel.}} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\} \star$$

param

$$= \left\{ t \mapsto Ae^{2t} + Be^{-2t} \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\} \star\star\star$$

$$= \left\{ Au + Bv \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\} \star\star\star\star$$

$u : t \mapsto e^{2t}$ $\qquad v : t \mapsto e^{-2t}$

Soit $t \in \mathbb{R}$ $\qquad e^{2t} = 1$

$t = 0$ $\qquad t \mapsto e^{2t}$

$f \quad f(t)$

Rem : Notations

Matrice des coordonnées de x sur la base $\mathcal{B}$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ colonne

du système de vecteurs $\mathcal{F}$ . . . . . . $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ tableau

$$\mathrm{rg}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

$$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$=$

$\Leftrightarrow$

$\sim$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k$$

muet

$$\int_a^b f(s)\,ds$$

muet

$$(u_n)_{n\geq 1} = (u_k)_{k\geq 1}$$

muet

$$x \longmapsto f(x)$$

muet

$$E = \{ x \in A \quad f(x) = 0 \}$$

muet

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \sum_{k=0}^{n} p^k$$

$$q' = -\lambda q$$

Rappel :

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

Il est donc de dimension $2 \times 2 = 4$

$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

67 1)		⚠ $P_2 = -1 + X + X^2$ $T_7 \to$ on prouve que P_1, P_2, P_3 sont libres · soit par la déf : CL nulle $\Rightarrow$ CL triv. T_9 · { soit en vérifiant rg $\mathrm{Mat}(P_1, P_2, P_3) = 3$ (thm 7) $T_{8.1)}$ + argument de dimension 6 } très fréquent	
2)		utiliser matrice de passage (c'est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(P_1, P_2, P_3) = \Pi$ qui est inversible d'après 1))	
69	(A, B, C, D) base de E	T8.1) et on montre que la famille est libre avec Déf.	
	Coordonnées de M	def 11 + thm 8	réf : exo 10

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4 \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

Prérequis : savoir résoudre un système linéaire.

1 Espaces vectoriels à connaître

Tous les ensembles que vous connaissez équipés de la notion de combinaison linéaire (notion centrale de l'algèbre linéaire) sont des espaces vectoriels.

- **Espaces numériques :** $\mathbf{K}^p$ (qui n'a pas de base si $p=0$).
- **Polynômes :** $\mathbf{K}_n[X]$ est de dimension finie, $\dim \mathbf{K}_n[X] = n+1$. Une base en est la base canonique $\mathscr{B}_c$ **dans cet ordre** :
$$\mathscr{B}_c = \left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$$
- $\mathbf{K}[X]$ est de dimension infinie de base $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$.
- **Matrices :** $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de dimension finie np. Il admet une base canonique notée $\mathscr{B}_c$ qui est par exemple pour $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ **dans cet ordre** :
$\mathscr{B}_c = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$.
- **Fonctions :** L'ensemble $\mathscr{F}(I, \mathbf{K})$ (noté aussi $\mathbf{K}^I$) des fonctions définies sur un intervalle I, et à valeurs dans $\mathbf{K}$, est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. On n'en connaît pas de base.
- $\mathscr{C}^k(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, même avec $k=\infty$
- Soit a, b deux réels fixés. L'ensemble des solutions sur un intervalle I de l'EDL$_2$ homogène :
$$y" + ay' + by = \mathbf{0}$$
est un espace vectoriel de dimension 2 (on résout et on met sous forme de Vect pour voir que c'est un e.v.).
- **Suites :** Soit a, b deux réels et $p \in \mathbf{N}$ fixés. L'ensemble des suites (u_n) vérifiant :
$$\forall n \geq p \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$
est un espace vectoriel de dimension 2 (on résout et on met sous forme de Vect pour voir que c'est un e.v.).

oubliez

Hors-programme

T1 **Ensemble pareq ou param ?** INCONTOURNABLE ET ESSENTIEL

Un ensemble non défini en extension est toujours défini : soit par (in)-équations `[pareq]`, soit paramétriquement `[param]`.

1. `[pareq]` : la (les) variables descriptives se trouve(nt) en **début** d'ensemble :
   jamais de quantificateur
$$E = \{x \in D \quad \dots\} \subset D$$
   ici on a des équations ou des inéquations
   `pareq`. Dans ce cas : $E \subset D$.
2. `[param]` : la (les) variables descriptives se trouve(nt) en **fin** d'ensemble :
   jamais d'équations
$$E = \{\dots \quad x \in D\}. \not\subset D \text{ en gal !}$$
   jamais de quantificateur
   Dans ce cas, il faut regarder l'expression avant les variables pour identifier de quel ensemble l'ensemble E est un sous-ensemble : on n'a pas forcément $E \subset D$!
3. En dehors de ces deux définitions, l'ensemble E est mal défini.

$\mathbb{K}^p$ = L'ensembles des p-lotes d'éléments de $\mathbb{K}$

français

$\mathbb{K}^p = \{ (x_1,\dots,x_p) \quad x_i\in\mathbb{K} \}$ [PARAM]

Ex : $\mathbb{R}^2 = \{ (x_1,x_2) \quad x_1\in\mathbb{R},\ x_2\in\mathbb{R} \}$ [PARAM]

$(1,2)\in\mathbb{R}^2 \quad (-7,\pi/4)\in\mathbb{R}^2$

$(1,i)\notin\mathbb{R}^2$ mais $(1,i)\in\mathbb{C}^2$

$\mathbb{K}_n[X] = \{ P\in\mathbb{K}[X] \quad \deg(P)\le n \}$ [PAREQ]

$\mathbb{K}[X]$ = { polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ } MAL FOUTU

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ = { matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de ~~dimension~~ n,p }
taille !

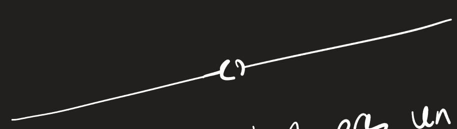
Le mot dimension est réservé aux espaces vectoriels

$\boxed{\text{Une matrice N'EST PAS un espace vectoriel!}}$

Un espace vectoriel EST UN ENSEMBLE

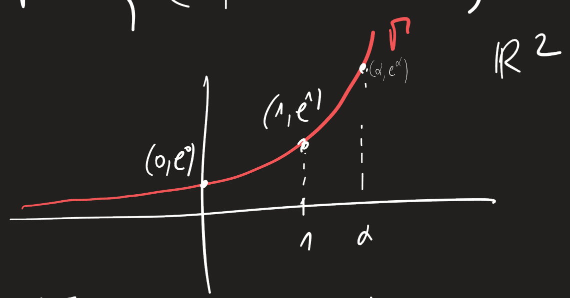
tous les ensembles ne sont pas des ev.

$\mathbb{R}$ is a vector space ($\mathbb{K}^p$ $p=1$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)



$\mathbb{R}^*$ n'est pas un espace vectoriel

$$\Gamma = \{ \overbrace{(x, e^x) \quad x\in\mathbb{R}}^{\text{PARAM}} \} \subset \mathbb{R}^2$$



Γ is not a vector space

$$\mathbb{K}[X] = \{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad a_k\in\mathbb{K},\ n\in\mathbb{N} \} \quad \text{[PARAM]}$$

$$\mathbb{R}[X] = \{ f\in C^\infty(\mathbb{R}) \quad \exists n\in\mathbb{N} \quad f^{(n)}=0 \} \quad \text{[PAREQ]}$$

$$= \{ \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad a_k\in\mathbb{R} \quad n\in\mathbb{N} \} \quad \text{[PARAM]}$$

T2 **C'est quoi un vecteur ?** DE m̂ IMPORTANCE QUE T1

C'est la question essentielle à se poser **avant de résoudre tout exercice** d'algèbre linéaire.

1. Réponse : ce sont les éléments de l'espace vectoriel E de travail.
2. Il est essentiel de contrôler **avant** de répondre :
   a) qu'on a bien identifié **l'ensemble** E (car ev = ensemble)
   b) qu'on sait si E est un ensemble pareq ou param.
   c) C'est par ce travail qu'on connaît le type d'objet qu'est un vecteur.

■ Exercice 1.
Dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0(\mathbf{R})$, on considère les fonctions $f_1 : x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right)$, $f_2 : x \mapsto \cos(x)$, $f_3 : x \mapsto \sin(x)$. Exprimer f_1 comme combinaison linéaire de f_2 et f_3.

■ Exercice 2.
Dans $\mathbf{R}[X]$, on considère $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - X$.

1. Trouver une relation simple entre P_0, P_1 et P_2.
2. Est-ce que P_2 est combinaison linéaire de P_0 et P_1 ?

2 Sous-espace vectoriel

■ Définition 1 .... [Sous-espace vectoriel de E]
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit F un ensemble, F est un s-e.v. de E si :

1. $F \subset E$.
2. $0 \in F$.
3. $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \in F$.

} résume le fait que toute CL de vecteurs de F est dans F

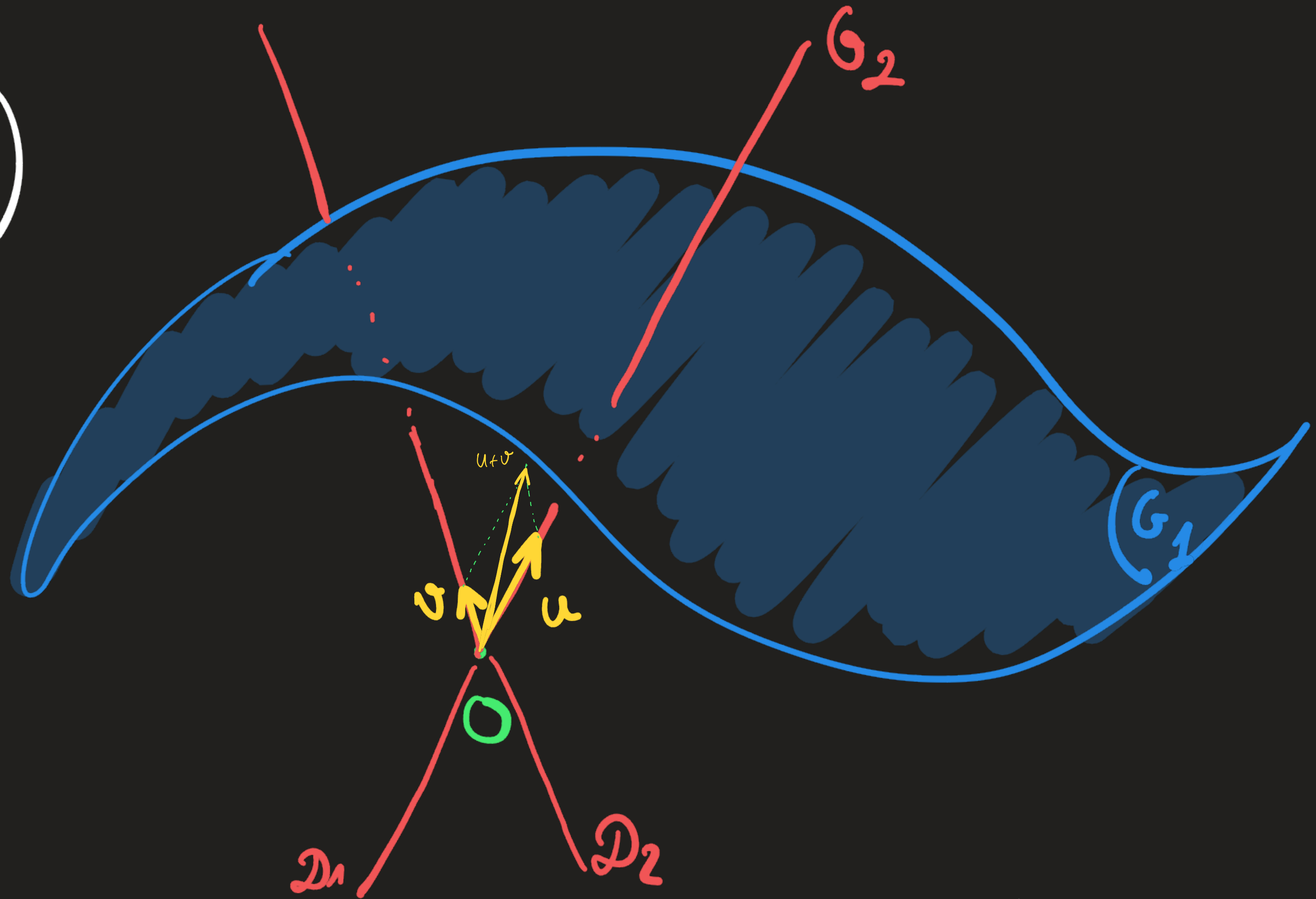
T3 **Montrer qu'un ensemble F est un sev d'un ev E**

T2

1. Dans $E = \mathbf{K}^n$: Un sev peut toujours être représenté
   a) soit par un système d'équations linéaires homogènes. Dans ce cas on l'identifie comme tel, et ceci prouve que c'est un sev de $\mathbf{K}^n$] incantation vaudoue
   b) Soit sous forme paramétrique. Dans ce cas, en séparant les paramètres intervenant dans la description de F, on met en évidence sa structure de Vect.
2. Dans les autres espaces vectoriels, c'est toujours plus ou moins une de ces deux représentations qui intervient.
   a) [Param] la séparation des variables descriptives dans la définition de F met en évidence la structure de Vect.] incantation chamanique
   b) [Pareq] ou dans les cas moins clairs, on revient à la définition. ⚠

T1 T1

E)



G_1 : pas un espace vectoriel : $0 \notin G$.

$G_2 = \cancel{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2}$

NS

TYP

$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{0\}$ ✓

$\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$

$\cancel{\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2}$

$A \subset E$
$B \subset E$ $\quad A \times B \not\subset E$

$u \in G_2$
$v \in G_2 \quad u+v \notin G_2$

→ on ne peut pas faire de CL dans G_2 en restant dans G_2

G_2 is not an ev

$\mathcal{D}_1$ est un ev
$\mathcal{D}_2$ est un ev
le plan contenant $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ aussi

} Ce sont des sev de E.

Exercice 1 : $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ← c'est mon ev

vecteur = fonction.

on cherche deux scalaires* α et β tq :

$$f_1 = \alpha f_2 + \beta f_3$$

traduit une égalité de vecteurs donc différentes interprétation suivant le contexte :

- égalité de fonctions : prennent les mêmes valeurs partout
- de matrices : égalités des coefficients
- de listes ($\mathbb{K}^p$) : égalités des composantes
- de polynômes :
  - égalités des coeffs

    ou
  - égalité des coeffs dominants

    et

    égalité des racines

    et

    égalité des multiplicités
- etc.

---

* Si E est un $\mathbb{K}$-ev

les éléments de E = vecteurs

$\mathbb{K}$ = scalaires

$$x + y = z \qquad x \times y = z$$

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot x$$

Exercice 2 $\quad P_0 = 1 \quad P_1 = X \quad P_2 = X^2 - X$

Toujours commencer avec $T_2 - T_1$

T_2 : $E_{v\,ra}$ $= \mathbb{R}[X]$

donc vecteur = polynôme.

$$P_2 = X(X-1)$$
$$P_2 = X(P_1 - P_0)$$
$$P_2 = XP_1 - XP_0 \quad (*)$$

ce ne sont pas des scalaires

donc $(*)$ ne montre pas que P_2 est C.L. de P_0 et P_1.

Je dis : " P_2 n'est pas C.L. de P_0 et P_1 ".

preuve : par absurde : supposons que pour 2 scalaires α et β :

$$P_2 = \alpha P_0 + \beta P_1 \quad (*)$$

égalité de vecteurs

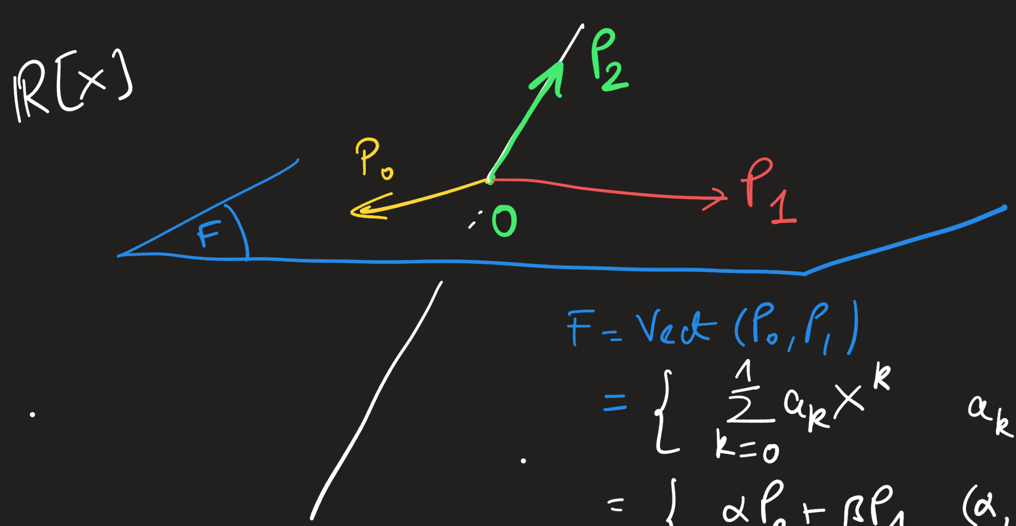
Cette égalité de poly. dit en particulier que P_2 a le m̂ degré que $Q = \alpha P_0 + \beta P_1$

Or $\deg(Q) \leq 1$.

$\deg(P_2) = 2$

donc $(*)$ est fausse.

Traduction géométrique :



$F = \mathrm{Vect}(P_0, P_1)$

$= \left\{ \sum_{k=0}^{1} a_k X^k \quad a_k \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \alpha P_0 + \beta P_1 \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \left\{ \alpha + \beta X \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \mathbb{R}_1[X]$

interdit de dessiner P_2 dans F car $(*)$ est impossible

On cherche donc 2 réels α, β tels que :

$$\underbrace{\forall x \in \mathbb{R}}_{\text{infinité d'égalité}} \quad \cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{égalité de nombres}}}{=} \alpha \cos x + \beta \sin x$$

Avec un peu de trigo, on sait que :

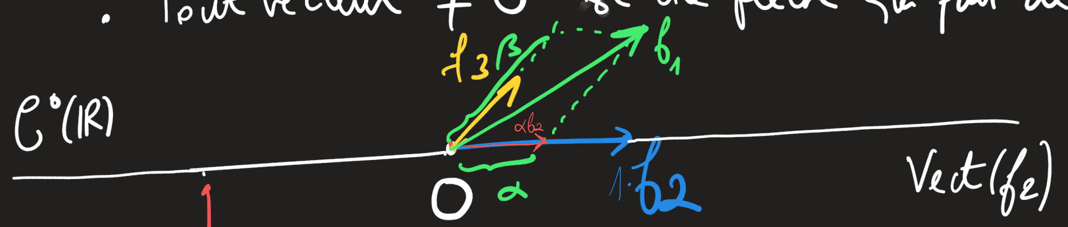
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right) = \cos\frac{\pi}{7} \cos x + \sin\frac{\pi}{7} \sin x$$

donc en termes de <u>vecteurs</u> :

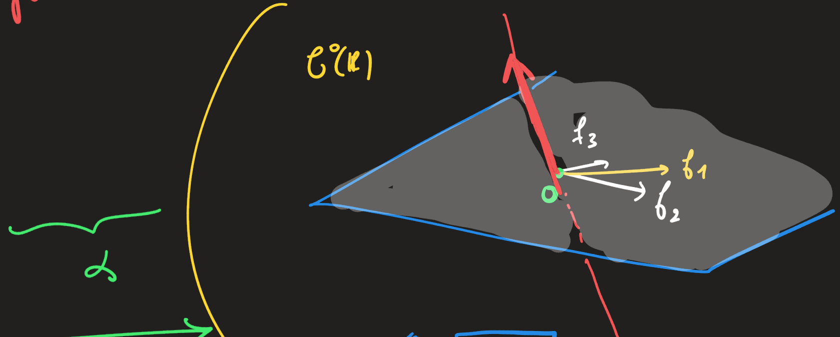
$$\underbrace{f_1 = \cos\frac{\pi}{7} \cdot f_2 + \sin\frac{\pi}{7} \cdot f_3}_{\text{c'est de l'algèbre}}$$

traduction géométrique de cette relation algébrique

- ev $\simeq$ la feuille
- un vecteur particulier qui ne se dessine pas comme les autres : le vecteur nul : 0
- Tout vecteur $\neq 0$ est une flèche qui part de 0



il serait faux de dessiner f_3 sur cette droite



ensemble de toutes les c.l. possibles de f_2 et f_3

= plan $\underbrace{Vect}_{ev}(f_2, f_3)$

= sev de $C^0(\mathbb{R})$ engendré par f_2 et f_3

$$= \{ \alpha f_2 + \beta f_3 \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \}$$

apparaît comme param

$$E = \{ f \in C^0(\mathbb{R}) \ \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad f = \alpha f_2 + \beta f_3 \}$$

✓ pareq.

rem : $Vect(f_2, f_3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pas trivial mais vrai}}}{=} \{ y \in C^2(\mathbb{R}) \quad y'' + y = 0 \} \subset C^2(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R})$

■ Exemple 1.
On montre par la définition que l'ensemble Z des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $P(0) = P'(0) = 0$ est un s-e.v. de $\mathbf{R}[X]$.

■ Remarque 1. Un ev admet toujours des sev :

Dans tout e.v. E, les ensembles E et $\{\mathbf{0}\}$ sont des s-e.v. de E appelés sous-espaces triviaux de E.

■ Théorème 1 .... [*Stabilité de la notion par intersection*]
L'intersection de s-e.v. d'un e.v. E est encore un s-e.v. de E. C'est en général faux pour la réunion.

Voir $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{G}_2$.

3 s-e.v. engendré. Vect

Central

■ Définition 2 .... [Combinaison linéaire (CL)]
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $p \geq 1$ un entier, et $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1} \dots \mathbf{u_p})$ une famille de p vecteurs de E On appelle combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{F}$ tout vecteur de la forme :

$$\mathbf{S} = \lambda_1 \mathbf{u_1} + \lambda_2 \mathbf{u_2} + \dots + \lambda_p \mathbf{u_p} \quad (\star) \quad \text{où} \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad \lambda_i \in \mathbf{K}.$$

■ Définition 3 .... [Coeffs. d'une CL]
Dans $(\star)$, les scalaires λ_i s'appellent les **coefficients** de la combinaison linéaire.

■ Définition 4 .... [CL triviale ; CL nulle]
La combinaison linéaire $(\star)$ est dite **triviale** si tous ses coefficients sont nuls. La combinaison linéaire est dite **nulle** si $\mathbf{S} = \mathbf{0}$.

■ Théorème 2 .... [*s-e.v. engendré par une famille finie de vecteurs*]
Si $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_p})$ est une famille de p vecteurs d'un e.v. E, alors l'ensemble de tous les vecteurs de la forme $(\star)$ quand les λ_i varient dans $\mathbf{K}$ constitue un s-e.v. de E, appelé s-e.v. engendré par $\mathscr{F}$ et se note $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

■ Remarque 2.

1. On retient que **tout Vect est un s-e.v.**. incantation chamanique
2. ~~Dès qu'un sous-ensemble F d'un e.v. connu E est défini **paramétriquement**, en essayant de séparer les paramètres, on met en évidence la structure de Vect de F ce qui prouve que c'est un s-e.v. de E.~~

$\boxed{T_3\ 2a}$

■ Exercice 3.
Dans $\mathbf{K}^{\square}$, soit $F = \{(a, b, a, 2b) \quad (a, b) \in \mathbf{K}^2\}$. Montrer que F est un espace vectoriel.

■ Exercice 4.
Soit $G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2z - t = 0 \end{cases}\right\}$ Montrer que G est un espace vectoriel.

■ Proposition 1 .... [plus petit s-e.v.]
Tout s-e.v. contenant $\mathscr{F}$ contient $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

sev : il contient les CL des vecteurs de $\mathcal{F}$.

T_4 Prouver que $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subset G$, G s-ev

En deux temps :

1. On prouve que chaque vecteur de $\mathscr{F}$ est dans G.
2. On ajoute : G étant un s-ev, il contient aussi les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$.

Comme l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$ est par définition $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ on a bien l'inclusion.

Si G est un sev contenant les vecteurs de $\mathcal{F}$, et aussi leurs CL puisque G est un sev : $G \supset \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$

Exercice 3 (révision sup)

4-liste de scalaires

Dans $\mathbb{K}^{\boxed{4}}$, $F=\{(a,b,a,2b)\ (a,b)\in\mathbb{K}^2\}$

$\boxed{T_2}$ Ici : l'espace vectoriel est $\mathbb{K}^4$

$\boxed{T_1}$ F est param   F est un ensemble de 4-listes

$$\boxed{\text{Vecteur} = \text{liste de 4 scalaires}}$$

$\boxed{T_3 2b}$: on remarque que

$$F=\Big\{a\underbrace{(1,0,1,0)}_{\text{vecteur (obligé)}}+b\underbrace{(0,1,0,2)}_{\text{vecteur (obligé)}}\ (a,b)\in\mathbb{K}^2\Big\}$$

obligé de coordonner par un +

vérif :

$$a(1,0,1,0)+b(0,1,0,2)$$

$$\underset{\text{règles de calcul dans } \mathbb{K}^4}{=} (a,0,a,0)+(0,b,0,2b)=(a,b,a,2b)$$

OK ✓

Si on pose $u=(1,0,1,0)$
$v=(0,1,0,2)$

on a prouvé que $F=\mathrm{Vect}((u,v))$

$\boxed{\text{CCL : En tant que Vect, F est un sev de } \mathbb{K}^4}$

Exercice 4 (révision sup)

$\boxed{T_1}$ $G \subset \mathbb{R}^{\boxed{4}}$ (par déf d'ensemble décrit par éq)

$\boxed{T_2}$ Ici vecteur = 4-liste de réels

puisque $G \subset \boxed{\mathbb{R}^4}$ ← fait partie des ev à connaître

$\boxed{T_3}$ $\boxed{1.b}$ G est défini comme l'ensemble des solutions d'un système $\underbrace{\text{linéaire}}_{\text{essentiel}}$ et $\underbrace{\text{homogène}}_{\text{essentiel}}$ à $\boxed{4}$ inconnues.

C'est donc un sev de $\mathbb{R}^4$.

Déf : toute CL triviale est nulle.

⚠ toute CL nulle n'est pas forcément triviale.

$$\left.\text{CL triviale} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \text{CL nulle}\right\}$$

$\boxed{\text{Exercice :}}$ écrire mathématiquement l'ensemble défini dans l'énoncé du thm 2

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \left\{ \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \quad \begin{array}{l} \lambda_1 \in \mathbb{K} \\ \lambda_2 \in \mathbb{K} \\ \vdots \\ \lambda_p \in \mathbb{K} \end{array} \right\}$$

→ on apprend que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est par déf décrit paramétriquement

Exemple 1

$$Z = \left\{ P \in \mathbb{R}[x] \;\; \begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(0) = 0 \end{cases} \right\}$$

inconnue

PAREO

système d'équations

(T2) : Vecteur = Polynôme

On est dans (T3) 2 b)

1_ $Z \subset \mathbb{R}[x]$ par définition de Z. (pereo)

2\. $0 \in Z$? - Le polynôme nul 0 admet 0 comme racine.

vecteur nul = polynôme nul

- Le polynôme nul est égal à son polynôme dérivé.

3\. [le plus gros travail].

Soit $P \in Z$ $Q \in Z$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $R = P + \lambda Q \in Z$

on calcule $R(0) = P(0) + \lambda Q(0)$
$= 0 + \lambda 0$ car $P \in Z, Q \in Z$
$= 0$

on calcule $R'(0)$: $R' = P' + \lambda Q'$
$R'(0) = P'(0) + \lambda Q'(0)$
$= 0 + \lambda 0$ car $(P, Q) \in Z^2$
$= 0$.

Donc $R \in Z$ et Z est un sev de $\mathbb{R}[X]$.

Rem : on peut essayer de mettre Z sous forme param :

$$Z = \{ X^2 * P \quad P \in \mathbb{R}[X] \}$$

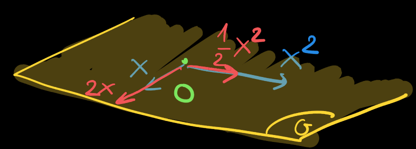
en effet : dire que $P(0) = P'(0) = 0$,
c'est dire que P admet 0 comme racine multiple Def couplé avec thm 2, cela donne que $P = X^2 R$ avec $R \in \mathbb{R}[X]$

■ Exemple 2.

Soit Z le s-e.v. de $\mathbf{R}[X]$ de **Exple 1.** Si $F = \mathrm{Vect}(X^2, (1-X)X^2)$, on montre que $F \subset Z$ en remarquant que : $\mathbf{A} = X^2$ et $\mathbf{B} = (1-X)X^2$ admettent, au vu de leur forme factorisée, 0 comme racine double. Ainsi ils vérifient $P(0) = P'(0) = 0$. Ils sont donc dans Z.

$\mathbb{R}[X]$

$$\mathrm{Vect}\left(2X, \tfrac{1}{2}X^2\right) = \underbrace{\mathrm{Vect}(X, X^2)}_{G}$$

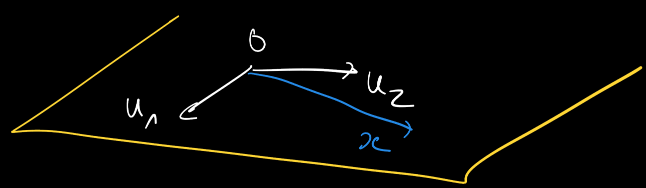


■ Exercice 5.

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \quad x - z = 0\}$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$, où $u = (5, 0, 1, 0)$, $v = (1, 15, 1/2, 1))$. Montrer que $F \subset E$.

■ Proposition 2 .... `[Règles de calcul avec Vect]`

1. $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u_2}, \mathbf{u_1})$. Ordre des vecteurs de la famille indifférent
2. $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p}, \mathbf{0}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p})$. 0 ne sert pas pour engendrer.
3. Si les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont non nuls : $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p}) = \mathrm{Vect}(\alpha_1 \mathbf{u_1}, \alpha_2 \mathbf{u_2}, \dots, \alpha_p \mathbf{u_p})$. On peut renormaliser
4. Si $\mathbf{x}$ est combinaison linéaire de $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p})$, alors :
   $\mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p}, \mathbf{x}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_p})$ x n'apporte rien
5. ☠ $\mathrm{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cap \mathrm{Vect}(\mathbf{w}, \mathbf{z}) \neq \mathrm{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z})$.



x est CL de u_1 et u_2

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, x)$$

→ rem : Ceci prouve qu'il n'y a pas de relation simple entre la dimension de Vect($\mathcal{F}$) et le nombre de vecteurs dans la famille $\mathcal{F}$.

T5 **Passer de la forme param à la forme pareq d'un sev F de K^n**

1. `[Pareq]` → `[Param]`. On résout le système d'équations dont on présente les solutions sous forme canonique. Permet même d'obtenir une base de F
2. `[Param]` → `[Pareq]`. On cherche les équations de compatibilité de l'équation : «$u \in \mathbf{K}^n$ est CL des vecteurs engendrant F» (revenir à la définition de combinaison linéaire).

■ Exercice 6.

1. Mettre le sev G de l'exercice 4 sous forme de Vect.
2. Trouver un système d'équations du sev F de l'exercice 3.

4 Familles génératrices

■ Définition 5 .... [Famille génératrice d'un s-e.v.]

Soit $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_p})$ une famille de $p \geq 1$ vecteurs d'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. On dit que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de F si $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

Exercice 6

toujours une famille de vecteurs (liste)

2) $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ $\quad \mathcal{F} = (u, v)$ $\quad u = \underbrace{(1,0,1,0)}_{\text{un vecteur}}$

$v = (0,1,0,2)$

(To : méthode de sup) $\quad \left(F = \{(a, b, a, 2b) \; a, b \in \mathbb{R}\}\right)$

Soit $w = \underline{(x, y, z, t)}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$

Par def, $w \in F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ $\quad w \in F \iff w$ est CL de u et v

$\iff$ la famille $\mathcal{G} = (u, v, w)$ est liée (sup ou def 7)

$\overset{\text{thm}}{\iff} \underbrace{A = \mathrm{Mat}(\mathcal{G})}_{\text{def 12}}$ est de $\boxed{\text{rang}} < 3$

On calcule $\mathrm{rg}(A)$ par pivot

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 2 & t \end{pmatrix} \cancel{\iff} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & x \\ 0 & \boxed{1} & y \\ 0 & 0 & z-x \\ 0 & 2 & t \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$\sim$ signifie : " est de même rang que "

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & x \\ 0 & \boxed{1} & y \\ 0 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & t-2y \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

$$\boxed{w \in F \iff \boxed{\mathrm{rg}(A) < 3} \iff \boxed{\begin{cases} z - x = 0 \\ t - 2y = 0. \end{cases}}}$$

ceci est un système d'équations de F.

Exercice 6 (illustre T_5)

$$G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2z - t = 0 \end{cases} \right\}$$

Je n'impose rien SAUF le calcul du RANG du système

Résolvons le système (S) d'éq. définissant G.
Sa forme réduite est :

$$(S) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

1. On échelonne par pivot partiel :

pivot

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

le système est échelonné et de rang $\boxed{2}$ — $\underbrace{\text{nb de pivot}}_{}$ après pivot partiel

2. calcul du rang et identification des inconnues

Il y a donc $\boxed{2}$ $\underbrace{\text{inconnues principales}}_{\text{inconnues attachées aux pivots}}$: x et y

Il y a donc $4-2=2$ $\underbrace{\text{variables libres}}_{\text{les autres inconnues}}$: z et t

3. remontée

On résout par remontée

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -y - z - t \\ y = z - 2t \end{cases}$$ (on exprime les inconnues princ. en fonction des V.L.)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = (2t - z) - z - t \\ y = z - 2t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2z + t \\ y = z - 2t \end{cases}$$

4. présentation des solutions

On présente G sous forme param : ← soyez soigneux

$$G = \left\{ (\overbrace{-2z+t,\, z-2t}^{\text{inc. princ.}},\, \overbrace{z,\, t}^{\text{V.L}}) \;\middle|\; z,t \in \mathbb{R} \right\}$$

tête de param.

$$\underset{T3.2a}{=} \left\{ z\,\underbrace{\overbrace{(-2,1,1,0)}^{u}}_{\text{obligé}} \underbrace{+}_{\text{obligé}} t\,\underbrace{\overbrace{(1,-2,0,1)}^{v}}_{\text{obligé}} \;\middle|\; z,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$= \mathrm{Vect}(u, v)$ vérif : u, v sont bien des vecteurs

Exemple 2 (illustre $\boxed{T_4}$)

$$Z = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \begin{cases} P(0)=0 \\ P'(0)=0 \end{cases} \right\} \subset \mathbb{R}[X]$$ (cf exercice 1) paréq

Soit :

$$F = \text{Vect}\left(X^2, X^2(1-X) \right)$$ param $\subset \mathbb{R}[X]$

Montrer que $F \subset Z$.

$\boxed{T_2}$ Vecteur = polynôme (à coeffs réels)

Réponse : utiliser $\boxed{T_4}$.

$$F = \text{Vect}(\mathcal{F}) \quad \text{où} \quad \mathcal{F} = (R, S)$$

$$\text{avec} \quad R = X^2 \qquad S = X^2(1-X)$$

1. Les polynômes R et S sont factorisés par X^2. Ce qui prouve que 0 est racine au moins double de R et S. Donc $R(0)=R'(0)=0$
$S(0)=S'(0)=0$.

Ce qui prouve que $R \in Z$ et $S \in Z$.

2. De plus Z est un sev : donc il contient toutes les CL de R et S.

Autrement dit $Z \supset \text{Vect}(R, S)$

c-à-d. $\boxed{Z \supset F}$

T6 Prouver qu'une famille $\mathscr{F}$ est génératrice de F

Notons $\mathscr{F} = (\mathbf{u_1} \dots \mathbf{u_p})$.

1. Si on a réussi à écrire $F = \text{Vect}(\mathscr{F})$, c'est prouvé par définition de famille génératrice.
2. Sinon, il faut réussir à trouver pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de F des scalaires $\lambda_1 \dots \lambda_p$ tels que $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{u_1} + \cdots + \lambda_p \mathbf{u_p}$, ou alors, si on connaît une famille génératrice $\mathscr{G}$ de F, que la relation précédente est valable pour tout vecteur de $\mathscr{G}$: c'est essentiellement l'approche de T$_4$.

Prouver qu'une famille de vecteurs est génératrice de F par le point **1.** n'est en général pas simple, il faut se demander si on n'a pas d'autres moyens à disposition pour cela.

prop2.49)

5 Familles libres ⟸ mesure le degré de $\boxed{\text{redondance}}$ dans les familles de vecteurs

■ Définition 6 .... [Famille libre de vecteurs d'un s-e.v.]

Une famille finie de p vecteurs $(\mathbf{u_1}, \dots \mathbf{u_p})$ d'un e.v. E est **libre** si la seule CL nulle de ses vecteurs ne s'obtient que par la CL triviale, c-à-d : $\forall \lambda_1 \in \mathbf{K}, \dots, \forall \lambda_p \in \mathbf{K}$

$$\underbrace{\left[\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathbf{u_j} = \mathbf{0}\right]}_{\text{CL nulle}} \Rightarrow \underbrace{\left[\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0\right]}_{\text{CL triviale}}$$

signifie : aucun u_j est CL des autres

■ Définition 7 .... [Famille liée]

Une famille non libre est dite **liée**.

Exemple : $(u_1, u_2, \overbrace{u_1 - 2u_2}^{w})$ $w = 1u_1 - 2u_2$ c-à-d : $\overbrace{1u_1 - 2u_2 - w}^{\text{CL non triviale}} = 0$ ← CL nulle : famille liée !

■ Proposition 3 .... [Propriétés des familles libres]

Soit $\mathscr{F}$ une famille **libre** de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.

1. Toute sous-famille de $\mathscr{F}$ est libre. Ex : Si (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre (u_1, u_4) aussi.
2. Tout élément de Vect($\mathscr{F}$) est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$, et ce, de façon **unique**.

■ Théorème 3 .... [*Familles de polynômes (utile)*]

Les familles de polynômes **non nuls** à degré deux à deux distincts sont libres.

■ Proposition 4 .... [Liberté des petites familles]

CL non triviale

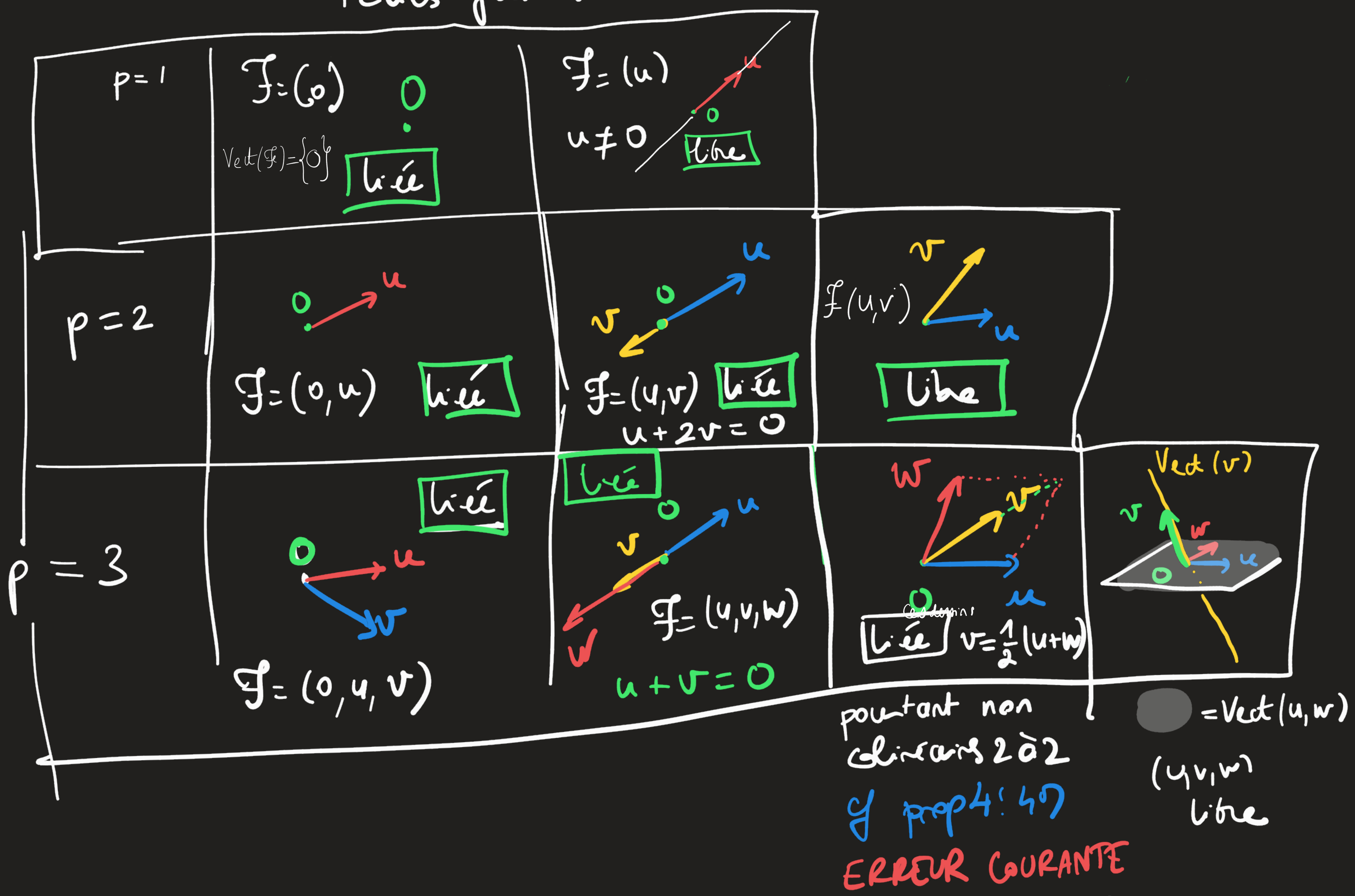
1. Toute famille contenant $\mathbf{0}$ est liée. $\overbrace{1}\cdot 0 = 0$ ← vecteur nul : Pas libre !
2. Une famille d'*un seul* vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
3. *Deux* vecteurs donnés sont liés si et seulement si ils sont proportionnels (c-à-d l'un est multiple de l'autre), ou colinéaires.
4. ☠ Une famille de *trois* vecteurs 2 à 2 non colinéaires n'est pas forcément libre.

■ Exercice 7.

(Familles libres dans $\mathbf{K}^p$) Soit $u = (1,1,1,1)$, $v = (1,0,-1,1)$, $w = (0,-1,-2,0)$ et $\mathscr{F} = (u,v,w)$

1. La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre ?
2. Le cas échéant, trouver une combinaison linéaire non triviale de u, v, w.

Petits familles.



sont universels : dans $\mathbb{K}^p$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{C}^0(I)$, $\mathbb{R}[X]$...

Intérêt des familles libres : le cardinal de $\mathcal{F}$ donne la dimension de Vect($\mathcal{F}$)

Sinon, c'est le <u>rang</u> qui donne la dim.

preuve de prop 3.29 (arg. classique).

Mettons que E est un ev.

$\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre de p vecteurs.

Prenons $u \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$

Par déf, u est CL de $u_1 \dots u_p$:

$\exists \lambda_1 \dots \lambda_p \in \mathbb{K} \qquad u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p. \ (1)$

Montrons que ces λ_i sont uniques.

Mettons que par ailleurs : $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p \quad (1')$

avec α_i des scalaires. Montrons que $\alpha_1 = \lambda_1$

$\vdots$

$\alpha_p = \lambda_p$.

$(1) - (1)'$ donne :

$$\underbrace{(\alpha_1 - \lambda_1) u_1 + \dots + (\alpha_p - \lambda_p) u_p}_{\text{cette CL est nulle d'après}} = 0$$

Comme $(u_1, \dots, u_p)$ est libre, cette CL

est nécessairement triviale :

$$\begin{cases} \alpha_1 - \lambda_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_p - \lambda_p = 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

T_7 Prouver qu'une famille $\mathscr{F}$ de p vecteurs est libre

1. On part de la définition et on exploite l'égalité vectorielle suivant la nature des vecteurs (une fonction est nulle si on part d'une CL de fonctions, ou une suite est nulle si on part d'une CL de suites,...). On peut ensuite recourir à des arguments en liens avec la nature des vecteurs (valeurs en certains points, limites, parité, régularité, degré, croissances comparées des termes de la CL *etc.*)
2. Si on est en dimension finie et qu'on dispose d'une base, on peut travailler en coordonnées et prouver que le rang de la matrice de $\mathscr{F}$ (`Déf.12`) est de rang p.

■ Exemple 3.

1. Les fonctions $\mathbf{c} = \cos$ et $\mathbf{s} = \sin$ sont libres (argument de parité).
2. Les fonctions $\mathbf{V}: x \mapsto |x-1|$ et $\mathbf{U}: x \mapsto x^2$ aussi par régularité.
3. Les fonctions $\mathbf{u} = \ln, \mathbf{v} = \exp, \mathbf{w} = X^2$ sont libres par argument de croissance à l'infini.

6 Bases

■ Définition 8 .... [Base de E ou d'un s-e.v. de E]
Une base d'un s-e.v. F d'un e.v. E est une famille à la fois génératrice de F et libre.

■ Exemple 4.
Exemples de bases :

— Revoir les exemples du **I**, (ev à connaître)

— Si $\mathscr{F}$ est une famille libre, c'est aussi une base de Vect$\mathscr{F}$.

Si $\mathscr{F}$ est libre, une base de Vect($\mathscr{F}$) est $\mathscr{F}$

■ Proposition 5 .... [Familles génératrices et bases]
Toute famille génératrice d'un s-e.v. contient une base de ce s-e.v..

■ Proposition 6 .... [Propriétés des bases]
Si $\mathscr{B}$ est une base d'un s-e.v. F d'un e.v. E, alors tout vecteur $\mathbf{x}$ de F est CL des éléments de $\mathscr{B}$ par un unique jeu de coefficients.

fait l'utilité / l'intérêt des bases

■ Remarque 3.
C'est cette propriété qui permet de parler des coordonnés d'un vecteur d'un s-e.v. F sur une base de ce s-e.v. (`Déf. 11`).

7 Dimension. Dimension finie. Rang

■ Définition 9 .... [Dimension finie]
Un espace vectoriel est dit de dimension finie si il est réduit à $\{\mathbf{0}\}$ ou si il admet une base constituée d'un nombre fini de vecteurs. Sinon il est dit de dimension infinie.

■ Théorème 4 .... [*de la dimension*]
Dans un e.v. E de dimension finie non réduit à $\{\mathbf{0}\}$, toutes les bases possèdent un nombre commun (et donc fini) de vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de E.

liste de phrases que je ne veux plus jamais voir
(ni entendre)

- cocher les cases
- j'dis ça j'dis rien
- de base
- t'es vraiment une belle personne !
- Belle journée
- la base de F — base d'un sev : jamais unique !
- la dimension de la base — concerne les sev
- la dimension de la matrice — pas un sev.

Exemple 3.

1) $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (pas donné ici mais adapter)

Vecteur = fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha \cos + \beta \sin = 0$ une CL nulle de cos et sin.

Montrons que cette C.L est triviale.

$$\alpha \cos = -\beta \sin$$

C'est une égalité de FONCTIONS

$\alpha \cos$ est une fonction paire.
Mais elle est égale à $-\beta \sin$ qui est impaire.

Donc $\alpha \cos$ est à la fois paire et impaire

donc $\boxed{\alpha = 0}$

donc $-\beta \sin = 0$

Comme sin n'est pas le vecteur nul,

$\boxed{\beta = 0}$

2. $u : x \mapsto |x-1|$ et $v : x \mapsto x^2$ sont libres.

Supposons que

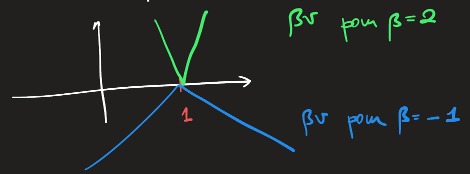
$\alpha u + \beta v = 0$ pour 2 scalaires α et β. Montrons que $\alpha = \beta = 0$.

En particulier $\beta v = \underbrace{-\alpha u}_{\text{polynôme}}$

donc $-\alpha u$ est dérivable en 1.

donc βv aussi.

Comme $\beta v : x \mapsto \beta|x-1|$



βv n'est dérivable en 1 que si $\boxed{\beta = 0}$

d'où $\alpha u = 0$

d'où $\alpha = 0$ car u n'est pas le vecteur nul.

3. Soit α, β, γ trois réels tq.

$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Vecteur = fonction

fonction nulle

Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$

En particulier :

a la plus forte croissance en $+\infty$.

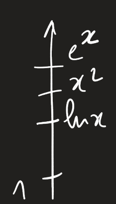
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad \alpha \ln x + \beta e^x + \gamma x^2 = 0$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad \beta = -\alpha \dfrac{\ln x}{e^x} - \dfrac{\gamma x^2}{e^x}$ $(*)$

Comme ceci est valable pour tout réel $x > 0$, on peut faire $x \to +\infty$ dans $(*)$

on obtient par échelle de croissance en $+\infty$:

3 m



$\boxed{\beta = 0 + 0}$

En recommençant, on obtient :

$\boxed{\gamma = 0}$

$\boxed{\text{enfin } \alpha = 0}$

oral agro 2023 (même style)

La famille (u, v, w) est libre.

■ **Théorème 5** .... [*Inclusion et dimension*]

1. Tout s-e.v. d'un e.v. de dimension finie est de dimension finie.

2. Si $F \subset G$ et F, G sont de dimension finie, alors $\dim F \leq \dim G$.

3. Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.

■ **Définition 10** .... `[Rang d'une famille finie de vecteurs]`

C'est la dimension du Vect qu'ils engendrent. Elle ne peut excéder le cardinal de la famille.

à cause de quoi ?
Props !

■ **Exercice 8.**

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}_2[X]$, soit $F = \operatorname{Vect}(1+X, 3)$,et $G = \mathbf{R}_1[X]$. Montrer que $F = G$.

■ **Théorème 6** .... [*Bases d'un s-e.v. de dimension connue*]

Si F est un s-e.v. de dimension $d > 0$ et si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de F, alors sont équivalents :

1. $\mathscr{F}$ est une base de F (libre et génératrice de F).

2. $\mathscr{F}$ est génératrice de F et possède d vecteurs.

3. $\mathscr{F}$ est libre et possède d vecteurs.

Très utile

T8 **Prouver qu'une famille $\mathscr{F}$ est une base de F**

1. Si on connaît la dimension de F, mettons $\dim F = d$.

a) on prouve que $\mathscr{F}$ est libre, ou alors on sait que $F = \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ par définition (il est en effet plus rare de prouver une telle égalité directement).

b) On vérifie que $\mathscr{F}$ contient d vecteurs.

c) Suivant qu'on est dans le cas 1 de **a)** ou 2, on conclut avec **Thm 6.** point **3.** ou **2.**

2. Si on ne connaît pas la dimension de F. On revient à la définition de base **Déf. 8**.

---

toujours une Colonne (déf 11)

8 Coordonnées, Calcul matriciel

■ **Définition 11** .... `[Matrice/coordonnées d'un vecteur]`

Si $\mathbf{x}$ est un vecteur d'un s-e.v. F d'un e.v. E, et si $\mathscr{B}_F = (\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_d})$ est une base de F, la matrice [des coordonnées] de $\mathbf{x}$ sur la base $\mathscr{B}_F$ est la **colonne** X définie de façon unique (`Prop.6`) par la relation :

$$F \ni \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{e_1} + \ldots \lambda_d \mathbf{e_d} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix}$$

ce n'est pas x
c'est une
représentation de x sur une base.

■ **Définition 12** .... `[Matrice d'un système de vecteurs sur une base donnée]`

La matrice d'une famille $\mathscr{F}$ de p vecteurs $(\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_p})$ d'un s-e.v. F sur une base $\mathscr{B}_F$ de ce s-e.v. est la matrice A à p colonnes dont la j-ème colonne est $\underbrace{\text{la matrice de } \mathbf{x_j}}_{\texttt{Déf. 11.}}$.

$\boxed{X \neq x}$

ses coordonnées vecteur

Exercice 8 : Je vais utiliser thm 5. 37

F et G sont deux sev de E

$\boxed{\text{Vecteur} = \text{poly. de degré} \leq 2}$

rappel : $\dim \underbrace{\mathbb{R}_2[X]}_{E} = 3$. Base : $\underbrace{(1, X, X^2)}_{\text{base canonique de } E}$
(voir I)

Plan de la preuve :
- calculer dim F
- dim G
- vérifier que dim F = dim G
- établir une inclusion.

. dim G = 2 d'après le cours.

• dim F ? $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ $\mathcal{F} = (P_0, Q_0)$
où $P_0 = 3$ $Q_0 = 1 + X$

$\mathcal{F}$ est génératrice de F par déf de Vect.

$\mathcal{F}$ est libre : thm 3.

donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } F}$

Comme $\mathcal{F}$ contient 2 vecteurs
$\boxed{\dim F = 2} = \dim G$ (2)

T4 : $P_0 \in G$ car $\deg P_0 \leq 1$

$Q_0 \in G$ $\deg Q_0 \leq 1$

Comme G est un sev contenant P_0 et Q_0,
il contient $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = F$.

$G \supset F$ (3)

On conclut avec (3), (2) et thm 5.37

■ Théorème 7 .... [*Calcul en coordonnées*]
Avec les notations de Déf.12 : la famille $\mathscr{F}$ est libre ssi A est de rang p, génératrice de F ssi A est de rang $\dim F$, une base de F ssi A est inversible (dans ce dernier cas, A s'appelle **matrice de passage** de $\mathscr{B}_F$ à $\mathscr{F}$).

■ Remarque 4.
Cette approche matricielle permet d'utiliser les méthodes vues en première année.

■ Définition 13 .... [Matrice de passage]
Toute matrice d'une famille de vecteurs qui est $\underbrace{\text{inversible}}_{\text{on parle de la matrice}}$.

■ Remarque 5.
En effet, les colonnes d'une telle matrice représentent la famille $\mathscr{F}$ sur la base $\mathscr{B}_F$. On l'appelle pour cela matrice de passage de la base $\mathscr{B}_F$ à la base $\mathscr{F}$.

T9 Quand envisager un traitement matriciel de la question ?

Dès qu'on dispose d'une **base**, on dispose de **coordonnées sur cette base**, et donc du **calcul matriciel** :

Dimension finie + base → matrices + thm 7

■ Théorème 8 .... [*Première Formule du changement de base*]
Si E est un e.v. de base $\mathscr{B}$, si $\mathscr{B}'$ en est une autre base, et si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ alors pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de E, les coordonnées X de $\mathbf{x}$ sur $\mathscr{B}$ sont reliées à ses coordonnées X' sur $\mathscr{B}'$ par : $X = PX'$.

■ Remarque 6.
Ne pas confondre avec la seconde formule du changement de base, qui concerne non pas les vecteurs, mais les applications linéaires !

■ Exercice 9.
Dans $E = \mathbf{R}_2[X]$, on considère : $P = 1 + X$, $Q = 3$, $R = X^2 - X$, $T = X^2 + 1$. Soit aussi :
$F = \mathrm{Vect}(P, Q)$, $G = \mathbf{R}_1[X]$ et $H = \mathrm{Vect}(T, R)$.

1. Donner une base et la dimension de H.
2. En notant que $P \in E$, mais aussi que $P \in F$ et enfin que $P \in G$, donner les coordonnées de :
   - **a)** $P \in E$ sur la base canonique.
   - **b)** $P \in G$ sur la base canonique.
   - **c)** $P \in F$ sur la base (P, Q) (vérifier que c'est une base de F).
   - **d)** $P \in H$ sur la base (T, R) (idem).
   - **e)** $P \in H$ sur la base (R, T).

■ Exercice 10.
Soit $E = \{y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}) \quad y'' + y = 0.\}$. Notons aussi $f_1 : x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $f_2 : x \mapsto \sin x$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.
2. Montrer que (f_1, f_2) est une base de E.
3. Soit $g = \frac{5}{2}\cos + 2\sin$.
   - **a)** Justifier que $g \in E$.
   - **b)** Donner les coordonnées de g sur la base (f_1, f_2).

Exercice 10

T_1-T_2 : $E = \{ y \in C^\infty(\mathbb{R}) \; \overbrace{y'' + y = 0}^{(E)} \}$ param

vecteur = fonction C^∞

1– $E \subset C^\infty(\mathbb{R})$

On montre que E est un sev de $C^\infty(\mathbb{R})$.

T_3 : Méthode 1 : appliquer la déf.

- La fonction nulle est solution de $y'' + y = 0$ donc $0 \in E$.
- Si u est solution de (E), v est solution de (E), $\lambda \in \mathbb{R}$

montrons que $w = u + \lambda v$ est solution de (E)

(Rappel : par déf de E : $y \in E \iff y$ est solution de (E)).

$$w'' = u'' + \lambda v''$$
$$w = u + \lambda v$$
$$w'' + w = (u'' + u) + \lambda(v'' + v) = 0 + \lambda 0 \quad \text{car } u \in E \text{ et } v \in E$$

donc $w \in E$.

Conclusion E est un sev de $C^\infty(\mathbb{R})$.

(même preuve que dans TD exo 59 1.)

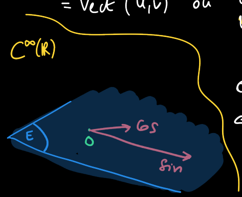
Méthode 2 : mettre E sous forme param, ce qui l'exprime comme un Vect, donc E est un sev.

D'après le cours sur la méthode de l'équation caractéristique : les solutions de $y'' + y = 0$ sont les fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto A\cos x + B\sin x$

$[(E_c) : r^2 + 1 = 0]$ racines : $\pm i$

A, B : variables libres

Donc :
$$E = \{ A\cos + B\sin, \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \} \ [\text{param}]$$
$$= \mathrm{Vect}(u, v) \quad \text{où} \quad \left.\begin{array}{l} u = \cos \\ v = \sin \end{array}\right\} \text{ce sont bien des vecteurs}$$



On a vu en exemple 3 que u et v sont libres donc (u, v) est libre, et génératrice de E, c'est donc une base de E

2) $\boxed{T_8}$ Cas 1. On vient de voir que $\dim E = 2$ car (u, v) en est une base.
. La famille (f_1, f_2) est de cardinal 2.
Il suffit de prouver que $f_1 \in E$, $f_2 \in E$, (f_1, f_2) est libre.

$\forall x \in \mathbb{R}$:
$f_1(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$ par formule de trigo.

En termes de vecteurs : $f_1 = \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \in \mathrm{Vect}(u, v)$

$f_2 = v$.

Montrons que $\mathscr{F}$ est libre :

T9 Soit $A = \mathrm{Mat}_{(u,v)}(\mathscr{F}) \underset{\text{déf 12}}{=} \begin{array}{c|cc} & f_1 & f_2 \\ \hline u & \frac{1}{2} & 0 \\ v & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{array}$ décomposé sur

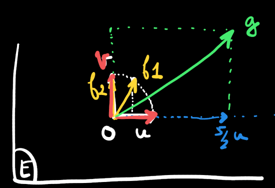
$\mathscr{F}$ est libre $\underset{\text{thm 7}}{\iff}$ A est de rang 2
$\underset{A \in M_2(\mathbb{R})}{\iff}$ A est inversible
$\iff \det A \neq 0$

Comme $\det A = \frac{1}{2} \neq 0$
$\mathscr{F}$ est libre.

D'après thm 6. 3) ⇒ 1) : $\mathscr{F}$ est une base de E

3–a $g = \frac{5}{2}u + 2v \in \mathrm{Vect}(u, v)$
donc $g \in E$.

Coordonnées de g sur $\mathscr{B}' = (f_1, f_2)$?
Donnée : coordonnées de g sur $\mathscr{B} = (u, v)$



Notons X les coordonnées de g sur $\mathscr{B}$
$$X = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Notons X' $\underbrace{\text{les coordonnées de } g \text{ sur } \mathscr{B}'}_{\text{c'est ce qu'on cherche}}$

La matrice de passage de $\underbrace{\mathscr{B} \text{ à } \mathscr{B}'}_{\text{ordre compte}}$ est par définition 13 :

$P = A$ ← on range dans A les vecteurs de $\mathscr{B}'$ décomposés sur $\mathscr{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après la formule du changement de base (thm 8)
$$X = PX'$$
Comme P est inversible (c'est une matrice de passage)
$$X' = P^{-1}X$$
$$X' = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{5\sqrt{3}}{2} + 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\boxed{g = 5f_1 + \left(2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)f_2}$

Rappel :

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$\det A = ad - bc$

intérêt : A inversible $\iff rg(A) = 2$

$\iff \det A \neq 0$

Fiche Rév 15 III A. b)

Formule de Cramer

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 10.

Exercice 9

1 – H est un sev en tant que Vect.

– On sait $\mathcal{B}=(R,T)$ est génératrice de H par déf de Vect.

– Montrons que $\mathcal{B}$ est libre :

$$R = X^2 - X$$
$$T = X^2 + 1$$

R et T sont non proportionnels (prop 4.)

donc libres (rem : Thm 3 ne s'applique pas).

Conclusion : $\mathcal{B}$ est une base de H et $\dim H = 2$.

$P = 1+X$	$E = \mathbb{R}_2[X]$
$R = X^2 - X$	$F = \mathrm{Vect}(P,Q)$
$T = X^2+1$	$H = \mathrm{Vect}(R,T)$
$Q = 3$	$G = \mathbb{R}_1[X]$

2a) Base canonique de E : $\mathcal{B}_E = (1, X, X^2)$

$P = (1+X)$

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(P)}_{\text{Coordonnées de } P \text{ sur } \mathcal{B}_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{car } P = 1\cdot 1 + 1\cdot X + 0X^2$$

2b) $P = 1+X \in G = \mathbb{R}_1[X]$

Base canonique de G : $\mathcal{B}_G = (1, X)$

$$\overbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}(P)}^{\text{Coord. de } P \text{ sur } \mathcal{B}_G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

car $P = 1\cdot 1 + 1\cdot X$

2c) On a prouvé dans exo 8 que $\mathcal{F} = (P,Q)$ est une base de F.

$P = 1+X$

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(P)}_{\text{Coord de } P \text{ sur } \mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

car $P = 1\cdot P + 0\cdot Q$

2d) $P \in H$? si $P \notin H$, cela n'a AUCUN SENS de chercher ses coordonnés sur la base (R,T) de H.

$P = X+1$

J'essaie d'exprimer comme une C.L de T et R, ce qui prouve que $H \ni P$
. donne les coord. de P sur (T,R)

$P = T - R$ à une : $P \in H$

$$\mathrm{Mat}_{(T,R)}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{car } P = 1\cdot T + (-1)\cdot R$$

2.e) $\mathrm{Mat}_{(R,T)}(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Morale : dans une base, l'ordre des vecteurs compte