CH8 – Séries numériques

Pour nous = outil pour les probas. Ne devrait intervenir que dans ce contexte (pour calculer des espérances/variances)

Plan du chapitre

Liste des définitions

Liste des techniques de base

pas vraiment au programme (vu en TD exo 46).

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. **T_0** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

1 Généralités

A) Ce qu'est une série

■ Définition 1 .... [Série numérique, terme général d'une série]

— Nouveau type d'objet. Ce n'est ni un nombre, ni une suite.

— Un objet de type série est noté : $\sum_{n\geq n_0} u_n$. permet d'identifier une série

t.g. de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$

Dans cette notation :

1. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite réelle ou complexe.
2. $n_0 = 0$, 1 ou 2 souvent. C'est le rang du premier terme de la suite (u_n).
3. u_n s'appelle dans ce contexte Le *terme général de la série*. C'est également le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

■ Définition 2 .... [Somme partielle d'une série]

Si $\sum_{n\geq n_0} u_n$, est une série, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ de terme général $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ s'appelle *suite des sommes partielles* de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$. Le nombre S_n s'appelle somme partielle (de rang n) de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

■ Proposition 1 .... [Lien entre t.g et somme partielle d'une série]

Pour la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$: $\quad \forall n > n_0 \quad S_{n-1} + u_n = S_n$

$1+2+3+4 \qquad \sum_{n\geq 1} u_n$

B) Convergence d'une série

■ Définition 3 .... [Convergence d'une série - somme d'une série - nature d'une série]

Avec les notations des définitions précédentes :

— La série est dite *convergente* si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est convergente.

— La limite ℓ de cette suite s'appelle la *somme* de la série et se note $\ell = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$

— Si une série ne converge pas, on dit qu'elle est *divergente*.

— Étudier la *nature* d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

■ Exemple 1.

1. La série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ est divergente.
2. La série $\sum_{n\geq 0}(1/2)^n$ est convergente, car la suite des sommes partielles tend vers 2. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0}(1/2)^n$ a pour somme 2. On écrit donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2$

$\boxed{\text{TYP}}$

Série ≠ somme de la série ≠ Somme partielle

série $\underbrace{\sum_{n\geq 0} u_n}_{\text{existe toujours}}$ $\qquad \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}_{\text{peut ne pas exister}}$ réel $\qquad \underbrace{\sum_{n=0}^{N} u_n}_{\text{existe toujours}}$ réel

Exemple 1

- $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$: divergente.

Déf | J'étudie la convergence des sommes partielles

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$

$$\underset{q=-1}{=} \sum_{k=0}^{n} q^k \leftarrow \text{somme des termes consec. d'une suite géom.}$$

$$\underset{q\neq 1}{=} 1 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} = \frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

en effet : $S_n = (1-1)+(1-1)+1 \cdots + (-1)^n$

$a - b = a + (-b)$
$= a + (-1) \times b$

$1-(-1)^{n+1}$
$= 1 + (-1)\times(-1)^{n+1}$
$= 1 + (-1)^{n+2}$ *
$= 1 + (-1)^n \times \underbrace{(-1)^2}_{1}$
$= 1 + (-1)^n$

* Autre façon de voir :
$n+2$ et n ont la même parité donc $(-1)^{n+2} = (-1)^n$.

On a donc :

$\forall n \geq 0 \quad S_{2n} = 1$

$S_{2n+1} = 0$.

les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont constantes, donc convergentes mais de limites distinctes.

D'après le thm des suites extraites, (S_n) est divergente.

$\rightarrow \sum_{n\geq 0} (-1)^n$ divergente.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \text{ n'a pas de sens}}$$

$\underbrace{S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots\cdots}$
ne peut pas se manipuler car n'existe pas !

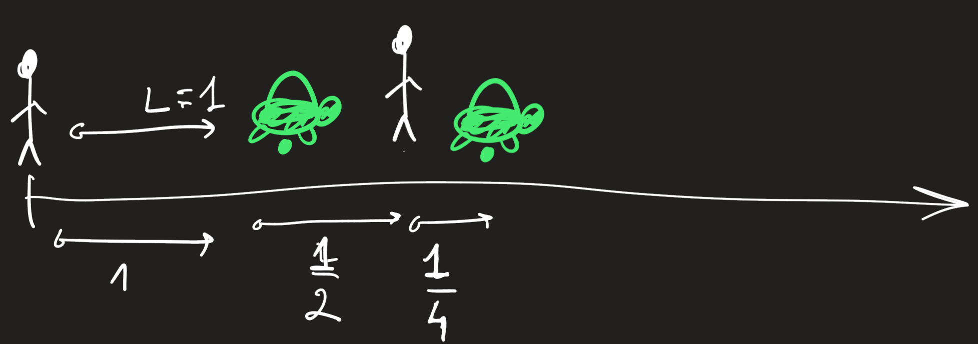
- $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\frac{1}{2} \neq 1$: $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{S_n = 2 + \underset{n\infty}{o(1)} \text{ car } 2^n \rightarrow +\infty}$$

ceci signifie : (S_n) est convergente et sa limite vaut 2.



Exemple 0 :

$$\sum_{n\geq 3} \frac{1}{2^n}$$ ← c'est une série

↑ le t.g de la série

suite des sommes partielles de la série :

$$(S_n)_{n\geq 3}$$

1re somme partielle : $S_3 = \sum_{n=3}^{3} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

2e somme . . . . $S_4 = \sum_{n=3}^{4} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

$S_5 = \quad = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

$S_6 = \quad = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$

;

$\forall n \geq 3 \quad S_n = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

T1 **Séries télescopiques**

Ce sont les séries du type $\sum_{k\geq p}(u_{k+1}-u_k)$.

1. Comme les sommes partielles se calculent simplement par telescopage (en effet : $\forall n \geq p$: $S_n = v_{n+1} - \underbrace{v_p}_{\text{constante}}$),
2. on conclut de **1.** que la suite $(S_n)_{n\geq p}$ des sommes partielles converge si et seulement si la suite (v_n) converge, et dans ce cas, la somme de la série est : $S = (\lim_{n\infty} v_n) - v_p$.

$u_k = \overbrace{v \quad v}$

C) Série tronquée

■ Définition 4 .... [Troncature d'une série]

Si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est une série, et $n_1 \geq n_0$ la série $\sum_{n\geq n_1} u_n$ s'appelle une troncature de la série.

■ Proposition 2 .... [Invariance de la nature par troncature]
Une série et une troncature de celle-ci sont de même nature.

■ Exemple 2.
Les séries $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$ sont de même nature.
est une troncature de

■ Remarque 1.
Ceci permet de considérer le terme général d'une série à partir d'un certain rang. Cela simplifie l'étude, notamment lorsque l'on a identifié le t.g. comme une combinaison linéaire de t.g. de séries connues.

T2 **Calcul de troncature**

1. Les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et p. ex : $\sum_{n\geq 2} u_n$ sont distinctes.
   a) Toutefois, il existe un lien entre leurs sommes partielles respectives $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(S'_n)_{n\geq 2}$ puisque :

   $$\forall n \geq 2 \quad S_n = u_0 + \cdots + u_n = u_0 + u_1 + \underbrace{u_2 + \ldots u_n}_{\text{présent car } n\geq 2} = u_0 + u_1 + S'_n$$

   b) En particulier les sommes des séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 2} u_n$ sont distinctes :

   $$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \overset{\textbf{1. a)}}{=} (u_0 + u_1) + \sum_{n=2}^{\infty} u_n$$

2. Ne pas confondre troncature et glissement d'indice, puisque p.ex :

$$\underbrace{\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n!} \neq \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}}_{\text{troncature}} \quad \text{mais} \quad \overbrace{\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!} = \sum_{n\geq 2}\frac{1}{(n-2)!}}^{\text{glissement d'indices}}$$

Sommes partielles | Sommes partielles

$S_0 = \sum_{n=0}^{0}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!}$ | $S_2 = \sum_{n=2}^{2}\frac{1}{(n-2)!} = \frac{1}{0!}$

$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}$ | $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}$

$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$ | $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$

⋮ | ⋮

D) Structure vectorielle de l'ensemble des séries

■ Définition 5 .... [Combinaison linéaire de séries]

Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont deux séries et a, b deux scalaires on définit la série notée $a \sum_{n \geq n_0} u_n + b \sum_{n \geq n_0} v_n$ comme la série $\sum_{n \geq n_0} (au_n + bv_n)$.

■ Proposition 3 .... [structure vectorielle]

1. L'ensemble $\mathscr{S}$ des séries numériques est un $\mathbf{R}$—espace vectoriel.
2. L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des séries convergentes en est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}$.

■ Remarque 2.
La somme d'une série convergente définit sur $\mathscr{S}_0$ une forme linéaire, puisque si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ sont dans $\mathscr{S}_0$, alors :

$$\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2 \quad \sum_{k=n_0}^{+\infty} (au_n + bv_n) = a \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_n + b \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_n$$

E) Séries de références

Servent tout le temps dans les exercices] Sac à dos

■ Théorème 1 .... [*Séries géométriques*]

1. La série géométrique $\sum_{k \geq 0} q^k$ converge **si et seulement si** $|q| < 1$. Dans ce cas :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.}$$

Il en est de même pour la série de t.g. q^{k+1}, (ou q^{k+2} *etc*).

2. Les séries géométriques dérivées $\sum_{k \geq 1} kq^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}. \quad (1)$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}. \quad (2)$$

■ Remarque 3.
Ne pas confondre :

— Suite géométrique : (q^n) $\cancel{q^n}$ réel réel

— Série géométrique : $\sum_{n \geq 0} q^n$ $\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n}$ réel

— Somme de termes consécutifs d'une série géométrique : $\sum_{k=p}^{n} q^k$ ← c'est aussi une somme partielle d'une <u>série</u> géom. (tronquée si $p \neq 0$)

— Somme d'une série géométrique :

T3 Calcul de la somme d'une série géométrique tronquée

1. On écrit la somme sous forme développée :

$$S = \sum_{k=p}^{+\infty} q^{k-k_0} = q^{p-k_0} + q^{p+1-k_0} + \dots$$

2. **a)** Si le premier terme de la somme ainsi développé vaut 1 : on a une série géométrique complète et $S = \dfrac{1}{1-q}$.

b) Sinon *on factorise le premier terme de* S pour se ramener au cas **2. a)** :

$$S = q^{p-k_0}(\underbrace{1 + q + q^2 + \dots}_{\text{série géométrique complète}}) = q^{p-k_0} \times \frac{1}{1-q}.$$

Exemple 3.

Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Définition 6 .... [Séries exponentielles]

Ce sont les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$

Théorème 2 .... [*Série exponentielle*]

Pour tout réel x, la série de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ converge et :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x. \text{ En particulier} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

Définition 7 .... [Série harmonique]

C'est la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Théorème 3 .... [*Séries zêta*]

1. La série harmonique diverge vers $+\infty$. Il en est de même pour la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ (Prop.2).

2. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Il en est de même pour la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)^2}$ (Prop.2).

Exemple 4.

Nature la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}$, et calcul de la somme le cas échéant.

① On reconnaît au facteur e^{-1} près le moment d'ordre 2 d'une loi $\mathcal{P}(1)$. Donc la série converge.
D'après Koenig, la somme vaut $e(1+1) = 2e$

② On remarque que :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 = n(n-1) + n$

en divisant par $n!$:

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!}$$

$$\boxed{\forall n \geq 2 \quad \frac{n^2}{n!}} = \underset{\substack{\text{t.g d'une} \\ \text{série exp.}}}{\frac{1}{(n-2)!}} + \underset{\substack{\text{t.g. d'une} \\ \text{série exp. TRONQUÉE}}}{\frac{1}{(n-1)!}} \quad \text{car } n(n-1) \neq 0 \text{ dans ce cas}$$

donc : en tant que CL de séries convergentes la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n^2}{n!}$ converge. (D'après prop3 2?)

On en conclut que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}$ converge car la troncature ne change pas la nature (prop2)

Calcul : $$\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}}_{S} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$S = \underset{(\text{thm } 2)}{e} + (e-1)$$

Finalement $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 0 + \frac{1}{1!} + S = 1 + S = 2e$$

Exemple 3 :

$$S = \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

somme d'une série géométrique tronquée

rem : on sait que S existe : Exemple 1 + proposition 2.

$$S = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \cdots$$

$$\overset{\boxed{T_3}}{=} \frac{1}{2^4}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right]$$

$$\overset{\text{Thm } 1}{=} \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \quad \text{où } q = 1/2$$

$$S = \frac{1}{2^4} \times 2 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

2 Étude de la convergence des séries

A) Condition nécessaire de convergence

■ Proposition 4 .... [Condition nécessaire de convergence d'une série]
Pour qu'une série soit convergente, **il faut** que son terme général converge vers 0. La réciproque est fausse.

Énoncé réciproque : $\boxed{\text{Si } u_n \to 0 \text{ alors } \sum u_n \text{ cvge}}$

cet énoncé est FAUX

■ Exemple 5.
Le t.g. de la série harmonique converge vers 0, mais la série harmonique diverge (Thm. 3)

■ Définition 8 .... [série grossièrement divergente]
Série dont le terme général ne tend pas vers 0. Elle est divergente par contraposition de la prop.4.

B) Condition suffisante de convergence

■ Définition 9 .... [Absolue convergence]
La série $\sum_{k\geq n_0} u_k$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{k\geq n_0} |u_k|$ est convergente.

■ Théorème 4 .... [*Cond. suffisante de convergence*]
Si une série converge absolument, alors elle converge. La réciproque est fausse.

■ Remarque 4.
Ceci incite à porter une attention particulière à l'étude des séries à termes positifs.

■ Exemple 6.
La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente mais non absolument convergente.

La convergence des sommes partielles a été étudiée dans CH4 exercice 2. (thm suits adj)

3 Séries à termes positifs

A) Convergence monotone

■ Théorème 5 .... [*Cv monot.*]
Si la série $\sum_k u_k$ est à termes positifs, elle converge si et seulement si la suite des **sommes partielles** est **majorée**. Sinon, la série diverge vers $+\infty$.

B) Équivalents

■ Théorème 6 très souvent utilisé .... [*équivalents*]
Deux séries à *termes positifs* de termes généraux équivalents sont de même nature.

On applique ce théorème en **travaillant sur les termes généraux, pas les séries, ni les sommes partielles.**

■ Exemple 7.
Montrer que la série de terme général $u_k = \ln\left(1+\frac{1}{4k^2}\right)$ converge.

preuve :

$$\boxed{\forall n \geq n_0 \quad S_{n+1} = S_n + u_n} \quad (*)$$

d'après la proposition 1 :

Par hypothèse : $\sum u_n$ cvge, ce qui,

Par def 3 signifie : (S_n) cvge. Notons $L = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$

Je peux passer à la limite dans $(*)$ qui est vraie $\forall n \geq n_0$: ✱ (u_n) converge (différence de 2 suites cv)

notons ℓ sa limite.

✱ De plus :

$$L = L + \ell$$

d'où $\boxed{\ell = 0}$

Exemple 7 $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)$

On a ici une série à termes positifs.

Comme $u = \frac{1}{4n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ on a par l'équivalent usuel

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u ,$$

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$$

Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2}$ converge

J'ai travaillé sur le t.g.

car $\boxed{\text{son t.g}}$ est, au facteur $\frac{1}{4}$ près le t.g. d'une série de référence convergente (thm3).

dites-le comme ça sur une copie

D'après le théorème sur les équivalents de séries à termes positifs (thm6)

$\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

C) Théorème de comparaison

Critère de Convergence des Séries A termes Positifs

■ Théorème 7 .... [CCSATP]

Si à partir d'un certain rang p (souvent $p = 1, 2$) : $0 \leq u_k \leq v_k$ alors :

1. si la série $\sum_k v_k$ converge, la série $\sum_k u_k$ aussi. Dans ce cas, on a de plus la relation suivante sur les sommes des séries : $\sum_{k=p}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=p}^{+\infty} v_k$
2. si la série $\sum_k u_k$ diverge, la série $\sum_k v_k$ aussi. (et leurs sommes sont égales à $+\infty$)

On applique ce théorème en **travaillant sur les termes généraux, pas les séries, ni les sommes partielles.**

■ Exemple 8.

1. **a)** Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$.

   b) En déduire la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

2. Étudier la nature de $\sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{k^{1/3}}$.

T4 **Comment étudier la nature d'une série ?**

1. Si le t.g. ne tend pas vers 0 : **grossière divergence**. Fin.
2. Sinon : **reconnaître :**
   - **a)** le t.g. d'une série de référence ou une combinaison linéaire de t.g. de séries de nature connue.
   - **b)** sinon : le moment d'une variable aléatoire discrète.
   - **c)** sinon : une série télescopique,
3. Sinon : **calculer** les sommes partielles S_n si ce sont des sommes qu'on sait calculer **T0**, et étudier la nature de la suite (S_n).
4. Sinon : examiner le **signe du t.g.** :
   - **a)** Si le terme général de la série est positif :
     - **i)** chercher un équivalent du t.g. et utiliser les séries de référence.
     - **ii)** sinon, utiliser le CCSATP sur le t.g..
   - **b)** Sinon : étudier l' absolue convergence de la série pour se ramener à un t.g. positif.

— On ne travaille **jamais** sur autre chose que le t.g.(sauf situation **3.**)

— Dans les calculs, on ne manipule **jamais la série elle-même**.

— Dans les calculs ,on n'introduit jamais **la somme** de la série avant d'avoir prouvé sa convergence par les méthodes **1**-**4**.

Exemple 8 :

1a) Soit $k \geq 1$.

$$(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = (k+1) - k = 1$$

d'où le résultat en divisant par :

$$\sqrt{k+1} + \sqrt{k} \neq 0$$

car $\sqrt{k+1} + \sqrt{k} \geq \sqrt{k} \geq 1 > 0$.

1b) Nature de $\sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

Je calcule les sommes partielles de cette série $\boxed{T_4}$ 3)

Soit $n \geq 1$ et soit $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \overset{1a)}{=} \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

Je somme ces inégalités de $k = 1$ à n :

$$S_n \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}_{\text{telescopage}}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad S_n \geq \sqrt{n+1} - 1}$$

On conclut que $\boxed{S_n \to +\infty}$

donc $\boxed{\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ est divergente}}$

2. $\forall k \geq 1 \quad 0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leq \dfrac{1}{k^{1/3}}$

Car $\forall k \geq 1 \quad k^{1/2} \geq k^{1/3}$

D'après le CCSATP comme $\sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ diverge,

$\sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{k^{1/3}}$ diverge aussi.

T5 Comment calculer la somme d'une série ?

1. Reconnaître le moment d'une variable aléatoire discrète (et éventuellement la formule de Koenig).

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}.$$

2. Calcul explicite des sommes partielles si ce sont des sommes usuelles, notamment **T1**. Attention aux troncatures **T2**.
3. Écrire le t.g comme CL de t.g. de séries de sommes connues.

$$(n^2+n)x^{2n} \overset{q=x^2}{=} n(n-1)q^n + 2nq^n \overset{n^2+n=n^2-n+2n=n(n-1)+2n}{=} q^2 \underbrace{n(n-1)q^{n-2}}_{\text{connu}} + 2q \underbrace{nq^{n-1}}_{\text{connu}}$$

T6 Comparaison avec une intégrale pour l'étude de $\sum_{n\geq p} f(n)$

Si f est une fonction *décroissante positive*, pour prouver la convergence de $\sum_{n\geq p} f(n)$:

1. On fixe un rang $k \geq p$, et par décroissance de f : $\forall t \in [k-1, k] \quad 0 \leq f(k) \leq f(t)$.
2. Donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall k \geq p \quad 0 \leq u_k \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t.$$

3. Enfin, en sommant les inégalités précédentes de $k = p$ à $k = n$ ($n \geq p$ étant entier fixé), par relation de Chasles :

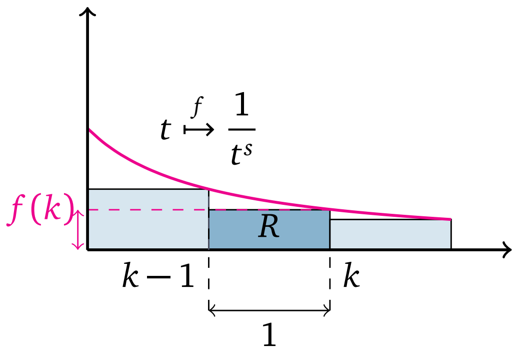
$$\forall n \geq p \quad 0 \leq S_n \leq \int_{p-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t.$$

4. Si on sait majorer cette dernière intégrale par un réel *indépendant de* n, cela établit la convergence de la série.

Rem. On peut aussi établir la **divergence** de la série en **minorant** les sommes partielles par une intégrale tendant vers $+\infty$ avec n.

■ Exemple 9.

Convergence de $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^s}$ *pour* $s > 1$.



1. Par décroissance sur $\mathbf{R}_+^\star$ de $t \overset{f}{\mapsto} \dfrac{1}{t^s}$:
   $\forall k \geq 2 \quad \forall t \in [k-1, k] \quad 0 \leq \dfrac{1}{k^s} \leq \dfrac{1}{t^s}$
2. puis par croissance de l'intégrale :
   $0 \leq \underbrace{\dfrac{1}{k^s}}_{\text{Aire du rectangle } R=1\times f(k)} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$
3. et enfin par sommation de $k=2$ à $k=n$ et par la relation de Chasles :
   $\forall n \geq 2 \quad 0 \leq \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$. D'où par primitivation :
   $\forall n \geq 2 \quad 0 \leq \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{s-1} - \frac{1}{n^{s-1}} \leq \frac{1}{s-1}$.
4. Les sommes partielles de la série sont majorées par $1/(s-1)$.
   Comme la série est à termes positifs, elle converge.