CH10 – Diagonalisation des matrices carrées

Plan du chapitre

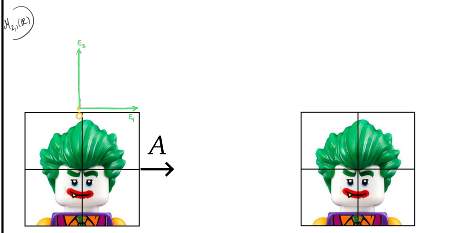
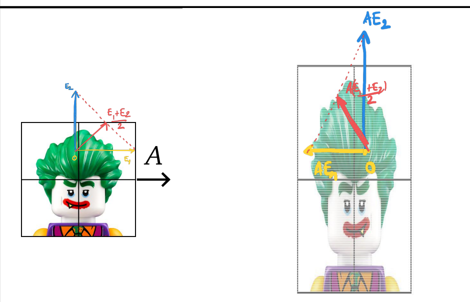
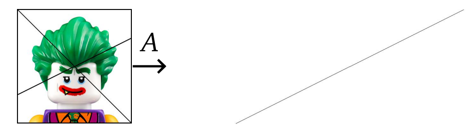
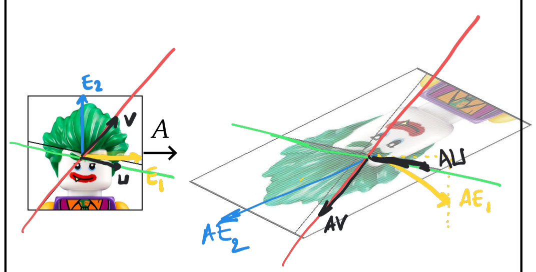
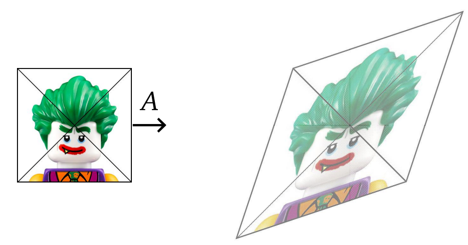
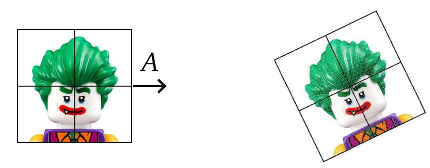
Liste des définitions

Liste des techniques de base

Grille d'analyse des exercices

Exercice	**Question**	**T**	**Référence(s)**	**Commentaires/remarques**

1. **T_0** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

$n=2$	**Matrice A de taille 2 x 2**	**Action de A** sur $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$	**Spectre**	**Sev propres de A**
1.	$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$		$\{1\}$	$\mathscr{E}_1=\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$
2.	$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$		$\left\{\frac{1}{2}\right\}$	$\mathscr{E}_{\frac{1}{2}}=\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$
3.	$A=\begin{array}{cc} AE_1 & AE_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}}\end{array}$ $A\left(\frac{E_1+E_2}{2}\right)=\frac{AE_1+AE_2}{2}$		$\{-1,2\}$	$\mathscr{E}_{-1}=\mathrm{Vect}\left((1,0)^{\mathsf{T}}\right)$, $\mathscr{E}_2=\mathrm{Vect}\left((0,1)^{\mathsf{T}}\right)$
4.	$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$		$\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$	$\mathscr{E}_0=\mathrm{Vect}\left((-1,1)^{\mathsf{T}}\right)$, $\mathscr{E}_{\frac{3}{2}}=\mathrm{Vect}\left((2,1)^{\mathsf{T}}\right)$
5.	$A=\begin{array}{cc} AE_1 & AE_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix}1 & -2\\ -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}}\end{array}$		$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$	$\mathscr{E}_{-\sqrt{2}}=\mathrm{Vect}\left((1,\frac{1+\sqrt{2}}{2})^{\mathsf{T}}\right)$ $\mathscr{E}_{\sqrt{2}}=\mathrm{Vect}\left((1,\frac{1-\sqrt{2}}{2})^{\mathsf{T}}\right)$
6.	$A=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$		$\{1,2\}$	$\mathscr{E}_1=\mathrm{Vect}\left((1,-1)^{\mathsf{T}}\right)$ $\mathscr{E}_2=\mathrm{Vect}\left((1,1)^{\mathsf{T}}\right)$
7.	$A=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\end{pmatrix}$		$\varnothing$	

- **Prérequis :** résolution des systèmes linéaires. Systèmes de Cramer. Rang.
- $n \geq 1$ est un entier fixé.
- Les colonnes seront notées par des lettres grasses pour vous aider à vous y retrouver.
- **Notation.** La matrice transposée d'une matrice M est notée $M^{\top}$ (la notation ${}^tM$ est désuette).

Bon à savoir

■ Théorème 1 .... *[Propriétés basiques de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$]*

Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$. Oon note pour tout entier $j \in \{1 \dots n\}$: $\mathbf{E}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i}^{\text{ème}}$,

1. La famille $\mathscr{B}_c = (\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n)$
   est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
2. La dimension de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est n.
3. La matrice des coordonnées de $\mathbf{X}$ sur $\mathscr{B}_c$ est $\boxed{X}$ $\quad X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$
4. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{Col}_j = A \times \mathbf{E}_j$ est la j-ème colonne de A.
   ↑ matrice carrée

■ Remarque 1.
Les espaces vectoriels $\mathbf{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ sont canoniquement isomorphes. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, l'application $f_A : \mathbf{X} \mapsto A\mathbf{X}$ définit un endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

1 Éléments propres d'une matrice carrée

A) Noyau d'une matrice carrée

■ Définition 1 .... [Noyau d'une matrice M]
Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, le noyau de M noté $\ker M$ est l'ensemble des **colonnes** $\mathbf{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ solutions du système linéaire matriciel homogène $M\mathbf{X} = \mathbf{0}$ (ou sous forme réduite : $(M|\mathbf{0})$)

■ Remarque 2.
TYP Le noyau d'une matrice est constitué de colonnes.

■ Exercice 1.
Donner la description mathématique de l'ensemble $\ker M$.

$\ker M = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \ MX = 0\}$

■ Proposition 1 .... [Structure vectorielle et dimension]
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

1. $\ker M$ est un s-ev de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
2. $\dim \ker M + \operatorname{rg}(M) = n$. (thm du rang)

En effet, $\ker M$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène d'inconnue $\mathbf{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

■ Exercice 2.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Donner le noyau de A.

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker A = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R}) \quad AX = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R}) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \right\}$$

On résout le système

système de rang 1

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$$

Équation de $\ker A$: $x + y = 0$

ép. d'une droite du plan de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\ker A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$. en colonnes!

Rappel : la droite d'équation $ax + by = 0$ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ si a est non nul.

$\underline{n=2}$ $\quad \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$: est un ev de dimension 2.

Base canonique : $\mathcal{B}_c = (E_1, E_2)$

où $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, p. ex $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$X = aE_1 + bE_2$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(X) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = X$

d'où l'intérêt de travailler dans cet ev.

Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$AE_1 = A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$ 1ère colonne de A

$AE_2 = A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$ 2ème col. de A.

Calculer Ker M

En général, on a affaire à des matrices M de petit format ($n \leq 4$),

1. le calcul du rang de M donne rapidement la dimension d de ker M (**prop.1**)
2. On peut chercher ensuite des combinaisons des colonnes $\mathbf{Col}_j$ de M nulles. En effet, mettons p.ex que l'on trouve une combinaison comme : $\mathbf{Col}_3 + 2\mathbf{Col}_2 - \mathbf{Col}_1 = \mathbf{0}$. Cela signifie (**Thm. 1**, point **4**).) que $M\mathbf{E}_3 + 2M\mathbf{E}_2 - M\mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$. Mais d'après le calcul matriciel cette dernière combinaison est aussi $M \times \underbrace{(\mathbf{E}_3 + 2\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)}_{\mathbf{U}}$. Donc $M\mathbf{U} = \mathbf{0}$
3. On en tire que **U** est dans ker M.
4. En trouvant d vecteurs libres par ce procédé, on obtient rapidement une base de Ker M. Sur une copie, on écrit quelque chose comme : «*Comme dim Ker $M = d$, il suffit d'en trouver d colonnes linéairement indépendantes pour obtenir une base de Ker M.*»

■ **Exercice 3.**

Trouver une base de ker M ou $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

$\boxed{T_1}$

B) Valeurs propres - vecteurs propres

■ **Définition 2** .... [valeur propre - vecteur propre - spectre d'une matrice carrée]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

1. On appelle valeur propre de A tout scalaire λ pour lequel la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
2. Toute solution **non nulle** du système linéaire homogène $(A - \lambda I_n|\mathbf{0})$ s'appelle vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
3. Le spectre de A est l'ensemble de ses valeurs propres. Il est noté $\sigma(A)$, ou sp(A), ou encore spec(A).

■ **Remarque 3.**
Par définition de système de Cramer, $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement existe une solution $\mathbf{X}$ non nulle au système linéaire de forme réduite $(A - \lambda I_n|\mathbf{0})$

■ **Définition 3** .... [Sous-espace propre associé à une valeur propre]
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \sigma(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par : $\mathcal{E}_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$ s'appelle sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

■ **Remarque 4.**

1. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est donc constitué de *tous* les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ.
2. Si on trouve une colonne $\mathbf{X}$ **non nulle** telle que $A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$, alors on peut affirmer que λ est valeur propre de A, et que $\mathbf{X}$ est un vecteur propre associé. Cas classique : sur chaque ligne de A, la somme des coefficients est toujours la même, mettons s. Alors s est une valeur propre de A et $\mathbf{X} = (1\ldots1)^\mathsf{T}$ est vecteur propre associé.

dit en T_4

■ **Exemple 1.**

Trouver une valeur propre de $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$.
Calculons

$\begin{cases} \boxed{MX = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4X} \\ X \neq 0 \end{cases}$

4 est valeur propre de M et X est un vecteur propre associé.

Exercice 3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

. Il est visible que $rg(M) \geq 2$

car les 2 premières de M sont non proportionnelles

• $rg(M) < 3$: $Col\,3 = col\,2 + col\,1$ $(*)$

autrement dit : col 3 est CL de col1 et col2.

(prop1) thm dung

donc $rg(M) = 2$.

Donc dim Ker $M = 1$: il suffit d'un vecteur non nul de Ker M pour en avoir une base.

D'après $(*)$ et thm 1 4. } $ME_3 = ME_2 + ME_1$ $(*)$

i.e. $M(\underbrace{E_1 + E_2 - E_3}) = 0$

cette colonne est donc dans Ker M.

(on a noté (E_1, E_2, E_3) la base can. de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)

$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Vect}(U)}$$

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$aE_1 + bE_2 + cE_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

■ Proposition 2 .... [Structure vectorielle des sous-espaces propres]

1. $\mathcal{E}_\lambda$ est un s-ev de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ de dimension au moins 1
2. $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est dans $\mathcal{E}_\lambda$ si et seulement si $A\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$.

$\mathcal{E}_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$ + prop 1.
et il contient vecteur propre
or par déf un vecteur
propre est non nul.

ne garantit pas
que X est vecteur propre

T2 **Prouver que X est vecteur propre de A**

1. On s'assure que $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$.
2. On calcule $A\mathbf{X}$.
3. Si cette dernière colonne est proportionnelle à $\mathbf{X}$, cela permet de conclure, et on obtient si on ne le savait pas déjà que le coefficient de proportionnalité entre $A\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}$ est une valeur propre de A.

• Un vecteur propre n'est JAMAIS NUL

• Tout vecteur NON nul de $\mathcal{E}_\lambda$ est un vecteur propre

C) Détermination du spectre

■ Théorème 2 .... [*Obtention du spectre*]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et pour tout scalaire λ, notons $A_\lambda = A - \lambda I_n$. Alors :

1. λ est une valeur propre de A si et seulement si $\operatorname{rang}(A_\lambda) < n$.
2. Si $n = 2$, les valeurs propres de A sont les racines du trinôme $\lambda \mapsto P(\lambda) = \det(A_\lambda)$. En particulier A possède au plus deux valeurs propres distinctes.
3. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

■ Exercice 4.

1. Calculer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
2. Même question avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

■ Corollaire 1 .... [*Spectre de la transposée*]
A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

preuve : M et M^T ont même rang pour toute matrice M.
En particulier $(A-\lambda I_n)^T = A^T - \lambda I_n$
a le même rg que $A - \lambda I_n$

■ Exemple 2.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ La somme des coeffs de chaque colonne de A fait 4. Ceci se traduit par $A^\mathsf{T}\mathbf{Y} = 4\mathbf{Y}$ où $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, 4 est vp. de A^T. Par `Cor.1`, 4 est aussi vp de A.

preuve du Thm 2.

1 - Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est valeur propre de $A \overset{\text{déf } 2}{\Longleftrightarrow} A - \lambda I_n$ non inversible

$\Longleftrightarrow rg(A - \lambda I_n) < n$.

2 - Dans le cas $n = 2$: λ est valeur propre

de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underset{1}{\Longleftrightarrow} rg(A - \lambda I_2) < 2$

$\Longleftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0$

$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\overset{\text{dvper}}{\Longleftrightarrow} \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$

Éq. du 2d degré par rapport à λ : au plus 2 solutions dans $\mathbb{K}$.

3. Soit une matrice triangulaire :

$A = \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$ $*$: scalaire éventuellement nul

λ est valeur propre de A

$\underset{1}{\Longleftrightarrow} rg(A - \lambda I_n) < n$

Or $A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} \boxed{a_1 - \lambda} & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \boxed{a_n - \lambda} \end{pmatrix}$

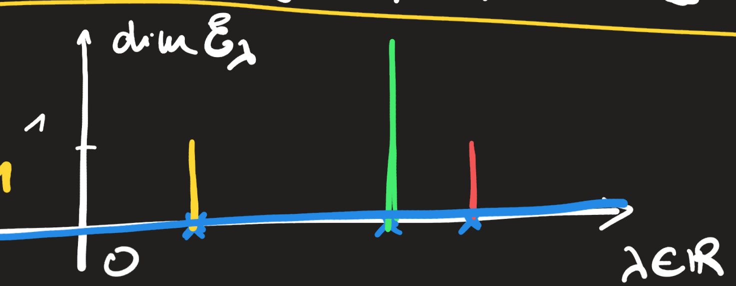
Cette matrice est échelonnée.

Dire que son rang est $< n$, c'est dire qu'au moins un coeff diag est nul.

λ valeur propre de $A \Longleftrightarrow \exists i \in \{1..n\}\ a_i - \lambda = 0$

$\Longleftrightarrow \exists i \in \{1..n\}\ \lambda = a_i$ ∎

Rem :
3 valeurs propres
2 sev prop. de dim 1
1 2



× : valeur propre

$\lambda \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \dim E_\lambda \geq 1$

(donc si $\lambda \notin \sigma(A)$ $\dim E_\lambda = 0$)

→ Explique la terminologie "spectre".

Exercice 4

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(thm 2.20) les valeurs de A sont les λ pour lesquels $\det(A - \lambda I_2) = 0$

$$A_\lambda = A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A_\lambda &= (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

$$\sigma(A) = \{2, 3\}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ A est triangulaire inférieure (triangle de 0 au-dessus)

thm 2.3. $\sigma(A) = \{1, 2, 0\} = \{0, 1, 2\}$

(ordre ne compte pas)

2 Étude des sous-espaces propres

A) Propriétés immédiates

■ Proposition 3 ...(contient prop2)... [Propriétés des sev propres $\mathscr{E}_\lambda$]
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \sigma(A)$. Alors

1. $\mathscr{E}_\lambda$ est un sev de dimension au moins 1, et si $\lambda \notin \sigma(A)$, alors $\mathscr{E}_\lambda = \{0\}$.] prop2 .
2. a) $A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \iff \mathbf{X} \in \mathscr{E}_\lambda$ ($\mathbf{X}$: colonne !)

   b) $\begin{cases} A\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \\ \mathbf{X} \neq \mathbf{0} \end{cases} \iff$ $\mathbf{X}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ
3. Le noyau de A est $\mathscr{E}_0$, et donc A n'est pas inversible si et seulement si $0 \in \sigma(A)$.]
4. ⋆⋆⋆ $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) + \dim(\mathscr{E}_\lambda) = n$. En particulier, dim $\mathscr{E}_\lambda$ vaut le nombre de variables libres du système linéaire homogène de forme réduite $(A - \lambda I_n|\mathbf{0})$
5. $\mathbf{X} \in \mathscr{E}_\lambda \Rightarrow \forall k \in \mathbf{N} \quad A^k\mathbf{X} = \lambda^k\mathbf{X}$. En particulier : $X \in \mathscr{E}_\lambda \Rightarrow AX \in \mathscr{E}_\lambda$

B) Valeurs propres et indépendance linéaire

■ Corollaire 2 ... [*Intersection des sous-espaces propres*]
Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes n'ont que le vecteur nul comme vecteur en commun.

■ Corollaire 3 ... [*Sert dans tous les exercices*]
En juxtaposant des bases (ou simplement des familles libres) de sous-espaces propres deux à deux distincts d'une matrice, on obtient encore une famille de colonnes libre.

■ Corollaire 4 ... [*Somme des dimensions*]
La somme des dimensions des sous-espaces propres d'une matrice $n \times n$ ne peut dépasser n.

■ Remarque 5.
en effet, les bases d'un sev sont les familles libres de ce sev de plus grand cardinal.

■ Corollaire 5 ... [*Nombre maximal de vp distinctes*]
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors A possède au plus n valeurs propres distinctes.

3 Diagonalisation des matrices carrées

A) Rappel sur les matrices semblables

■ Définition 4 ... [Matrices semblables]
Soit A et B deux matrices carrées de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ $(n \geq 1)$. On dit que A et B sont semblables si il existe une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ **inversible** telle que $P^{-1}AP = B$.

■ Remarque 6.
Il n'est pas spécilement facile de prouver que deux matrices données sont semblables en général, car la propriété « être semblable à» est existentielle.

■ Exercice 5.
Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, et $\alpha \in \mathbf{K}$. Trouver toutes les matrices semblables à αI_n. $= \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}$

s'appelle une matrice scalaire

preuve de prop 2. 3)

$$0 \in \sigma(A) \iff rg(A - 0 I_n) < n$$
$$\iff rg(A) < n$$
$$\iff A \text{ non inversible} \blacksquare$$

preuve de Cor 2.

Si $X \in \mathcal{E}_\lambda \cap \mathcal{E}_\mu$ et $X \neq 0$ montrons que $\lambda = \mu$.

$X \in \mathcal{E}_\lambda \Longrightarrow AX = \lambda X$

$X \in \mathcal{E}_\mu \Longrightarrow AX = \mu X$

par différence : $0 = (\lambda - \mu) X$

or (X) est libre car $X \neq 0$ donc la seule C.L. nulle de X est triviale : $\lambda - \mu = 0 \blacksquare$

Exercice 5.

les matrices semblables à $\alpha I_n = A$ sont par déf toutes les matrices de la forme :

$$B = P^{-1} A P \quad \text{où} \quad P \text{ est inversible}$$

Calculons $B = P^{-1} \times \alpha I_n \times P$

$= \alpha P^{-1} I_n P$

$= \alpha P^{-1} P$

$= \alpha I_n$ par déf de P^{-1}.

$= A$

Seule A est semblable à A.

<u>Rem</u> : toute matrice M est semblable à elle-même. En effet :

Je pose $P = I_n$

$$P^{-1} = I_n$$

$$\boxed{\boxed{P^{-1} M P} = \boxed{I_n M I_n} = M}$$

M est semblable à elle-même ■

B) Matrice diagonalisable

■ Définition 5 .... [Diagonalisabilité]

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale :

$$\exists P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ inversible t.q } P^{-1}AP \text{ est diagonale.}$$

■ Exemple 3.
Toute matrice diagonale D est diagonalisable. En effet, en prenant $P = I_n$, qui est inversible, on a : $P^{-1}DP = D$: D est semblable à elle-même, qui est diagonale.

■ Remarque 7.
Une matrice A ne possédant qu'une seule valeur propre λ est diagonalisable si et seulement si A est semblable à λI_n. Or d'après l'exercice 5, la seule matrice semblable à λI_n est λI_n. D'où : A est diagonalisable à une seule valeur propre ssi A est diagonale.

C) Critères de diagonalisabilité

■ Théorème 3 .... [*Condition nécessaire **et** suffisante de la diagonalisabilité*]

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Sont équivalents :

1. A est diagonalisbale.
2. La somme des dimensions des sev propres de A vaut au moins n.
3. La somme des dimensions des sev propres de A vaut n.

■ Corollaire 6 .... [*Condition suffisante de diagonalisabilité*]
Si$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet exactement n valeurs propres distinctes alors :

1. A est diagonalisable.
2. Les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

■ Remarque 8.
Dans tous les cas, on obtient une matrice P inversible diagonalisant A en juxtaposant des bases de chaque s-ev propre de A.

■ Théorème 4 .... [*Théorème spectral*]
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique **réelle** (c-à-d $A^\top = A$) alors :

1. A est diagonalisable.
2. Les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

■ Remarque 9.

1. En juxtaposant des bases **orthonormées de chaque sous-espace propre**, on obtient une matrice $P_\star$ diagonalisant A. La matrice $P_\star$ vérifie donc **dans ce cas particulier** :
$$\begin{cases} P_\star^{-1} & = & P_\star^\top \\ P_\star^{-1}AP_\star & \text{est} & \text{diagonale} \end{cases}$$
2. Attention, même si A est symétrique, la matrice P obtenue par juxtaposition de bases de chaque sous-espace propre **ne vérifie pas** $P^{-1} = P^\top$. Pour cela, **il faut s'assurer** que l'on a choisi **dans chaque sous-espace propre** des bases **orthonormées**.

■ Exercice 6.
Diagonaliser si c'est possible $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 6

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

T4

T4 1 Calcul du spectre :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \sigma(A) \iff rg(A - \lambda I_3) < 3$ (Déf 2)

$$\text{Soit } A_\lambda = A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -5-\lambda & 6 & 4 \\ -4 & 5-\lambda & 4 \\ \boxed{2} & -2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

Calculons $rg(A_\lambda)$ par pivot ⚠ éviter absolument un pivot dépendant de λ.

$$\boxed{A_\lambda \sim \begin{pmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ 0 & 1-\lambda & \alpha \\ \boxed{2} & -2 & -(3+\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 + (5+\lambda)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{matrix} \quad (E)}$$

$$B = \begin{pmatrix} \gamma & \beta \\ 1-\lambda & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 4 - 2(3+\lambda) = -2 - 2\lambda = -2(1+\lambda)$$

$$\gamma = 12 + (5+\lambda)(-2) = 2 - 2\lambda = 2(1-\lambda)$$

$$\beta = 8 - (3+\lambda)(5+\lambda) = -\lambda^2 - 8\lambda - 7$$

T3 . D'après la procédure de Gauss :

$$rg(A_\lambda) = \underline{\underline{1}} + rg(B) \text{ car } \boxed{2} \neq 0$$

. Donc $rg(A_\lambda) < 3 \iff rg(B) < 2$

$$\underset{B : 2\times 2}{\iff} \det B = 0 \quad (*)$$

. Calcul de $\det(B)$:

$$\det(B) = \alpha\gamma - (1-\lambda)\beta$$

$$= -2(1+\lambda)\cdot 2(1-\lambda) + (1-\lambda)(\lambda^2 + 8\lambda + 7)$$

Factoriser par $1-\lambda$

$$= (1-\lambda)\Big(-4(1+\lambda) + \boxed{(\lambda+7)(\lambda+1)}\Big)$$ relations coeffs-rac

$$= (1-\lambda)(1+\lambda)(-4+\lambda+7)$$

$$= (1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda+3)$$

sans les relations coeff/rac

$$(1-\lambda)(-4(1+\lambda) + \lambda^2 + 8\lambda + 7)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 3)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3)$$

avec discriminant ou rel. coeffs-rac.

Finalement : $\lambda \in \sigma(A) \overset{(*)}{\iff} \lambda \in \{-1, -3, 1\}$

Si on ne s'est pas trompé, pour ces valeurs de λ, A_λ n'est pas de rg 3.

T4 2b) A possède 3 valeurs propres distinctes et est de taille 3×3, donc :

Cor 6. $\begin{cases} - A \text{ est diagonalisable.} \\ - \text{Les sev propres de } A \text{ sont de dim } 1 \; (**) \end{cases}$

T4 3) Calcul d'une base de chaque sev propre

T1 . L'obtention d'un vecteur non nul du sev propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A_\lambda)$ fournit une base de E_λ d'après $(**)$

• $\lambda = -3$. $A_{-3} = A + 3I_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ d'après (E)

Col 1 + col 2 = col 3 T1

i.e. Col 1 + col 2 − col 3 = 0

i.e. $E_1 + E_2 - E_3 \in \mathrm{Ker}(A_\lambda)$

On a noté (E_1, E_2, E_3) la base can. de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Comme $U = E_1 + E_2 - E_3 \neq 0$,

$$\boxed{\mathcal{E}_{-3} = \mathrm{Ker}(A + 3I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \leftarrow U \qquad \mathcal{B}_{-3} = (U)$$

• $\lambda = -1$. $A_{-1} = A + I_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est une base de } \mathcal{E}_{-1}} \qquad \mathcal{B}_{-1} = (V)$$

• $\lambda = 1$ $A_1 = A - I_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

$$\boxed{W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est une base de } \mathcal{E}_1} \qquad \mathcal{B}_1 = (W)$$

T4 4) En juxtaposant $\mathcal{B}_{-3}, \mathcal{B}_{-1}, \mathcal{B}_1$, on obtient $P = (U \,|\, V \,|\, W) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\text{inversible}}$ diagonalisant A par :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

il est inutile de calculer le produit $P^{-1}AP$ matriciellement !

$$\left(\begin{array}{c|cc} \alpha & * & * \\ \hline 0 & & \\ 0 & & \end{array}\right)$$

T3 Calculer le rang d'une matrice 3×3

Si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, et si on a par pivot partiel :

$$M \sim \left(\begin{array}{c|cc} \alpha & * & * \\ \hline 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{B}} \end{array}\right),$$

alors $\mathrm{rg(M)} = \mathrm{rg}((\alpha)) + \mathrm{rg}(B)$. Or, le rang de la matrice (α) est 1 ssi $\alpha \neq 0$ (et 0 sinon), tandis que le rang de B est 2 ssi son déterminant est non nul (puisque B est de taille 2×2). En particulier, si $\alpha \neq 0$, $\mathrm{rg}(M) < 3$ ssi $\det B = 0$.

T4 Comment diagonaliser une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?

1. On commence calculer le spectre de A., c-à-d. par rechercher les valeurs propres de A. Il y en a qui sont évidentes parfois. Notamment :
   — Si $\mathrm{rg}(A) < n$, 0 est valeur propre de A. (**prop. 3**,**3.**).
   — Si la somme des coefficients des lignes (ou des colonnes) de A sont toutes égales, cette somme est une valeur propre en introduisant la colonne $\mathbf{U} = (1 \ldots 1)^{\mathsf{T}}$.
   — Si l'énoncé nous en a fait calculer ou suggérer, il n'est peut-être pas nécessaire de se lancer dans le déploiment complet de la méthode (par exemple une colonne $\mathbf{X}$ introduite dans l'énoncé est peut-être un vecteur propre. En calculant $A\mathbf{X}$, on peut obtenir une valeur propre).
2. **a)** Si on a remarqué que A est symétrique réelle, on peut affirmer qu'elle est diagonalisable.
   b) Si A possède n valeurs propres distinctes, alors on peut affirmer que A est diagonalisable (**Cor. 6**) et même que les sev propres sont tous de dimension 1.
   c) Si la somme des dimensions des sev-propres est $\geq n$, diagonalisable. Exemple : A est une matrice 3×3. On détecté deux valeurs propres α, β, et $A - \beta I_3$ est de rang 1.
   d) Si la somme des dimensions des sev-propres est $< n$, on peut affirmer que A n'est pas diagonalisable.
3. Si A est diagonalisable, pour chaque valeur propre λ de A : On calcule une base $\mathscr{B}_\lambda$ du sev propre $\mathscr{E}_\lambda$ associé en remontrant le système $(A - \lambda I_n|\mathbf{0})$, ou avec **T1 qu'on peut même appliquer sur $A - \lambda I_n$ échelonnée si on n'a pas modifié l'ordre des colonnes durant le pivot**.
4. En juxtaposant les $\mathscr{B}_\lambda$ dans une matrice P, on obtient une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale. La diagonale est remplie avec les λ dans le même ordre que celui dans lequel les bases $\mathscr{B}_\lambda$ on été juxtaposées. Chaque λ est répété sur la diagonale dim $\mathscr{E}_\lambda$ fois.

4 Applications de la diagonalisation

A) Méthode générale

T5 **Établir un résultat pour une matrice diagonalisable**

Si on cherche à établir un résultat (R) relatif à une matrice A donnée :

1. On établit d'abord le résultat (R) pour une matrice D diagonale quelconque au lieu de A.
2. On diagonalise A en une matrice D à travers une matrice P. Ou alors, si les calculs ne sont pas demandés, on se contente de prouver que A est diagonalisable.
3. On déduit ensuite le résultat (R) pour la matrice A en passant par D grâce à la relation $A = PDP^{-1}$

Cette technique est appliquée dans les 4 applications qui suivent.

Exemple 4.
La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $P^{-1}AP = D$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

B) Application 1 : calcul des puissances d'une matrice

Exemple 5.
À savoir faire. Calcul de A^m où $m \in \mathbf{N}$.

1. On calcule d'abord D^m pour toute matrice D diagonale (ce qui est facile).
2. On diagonalise A à travers P, de sorte que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. On montre par récurrence que $D^m = P^{-1}A^m P$.
4. On revient au problème initial par : $A^m = PD^m P^{-1}$.

Exercice 7.
Calculer A^n pour tout entier n, où A est la matrice l'exemple 4.

C) Application 2 : Résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Même principe pour un système différentiel :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{X} \quad \mathbf{X}(t) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}).$$

1. On résout d'abord $\mathbf{Y}' = D\mathbf{Y}$ (inconnue : $\mathbf{Y}$), où D est diagonale. Ce qui est facile.
2. On diagonalise A qui est alors semblable à D qui est une matrice diagonale.
3. On revient au problème initial en sandwichant par P, P^{-1} convenablement : la dernière équation équivaut à $P\mathbf{Y}' = PDP^{-1}P\mathbf{Y}$, et après avoir vérifié que $P\mathbf{Y}' = (P\mathbf{Y})'$, les solutions sont les $\mathbf{X} = P\mathbf{Y}$, où $\mathbf{Y}$ sont les solutions du problème **1.**. Noter que le calcul de P^{-1} n'est jamais utile ici !

Exercice 8.
Trouver les fonction $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ définies sur $\mathbf{R}$ telles que :

$$\begin{cases} x' &= 3x - 2y \\ y' &= 4x - 3y \end{cases}$$

D) Application 3 : recherche des matrices commutant avec une matrice donnée

■ Exercice 9.
Trouver toutes les matrices qui commutent avec la matrice A de l'exemple 4.

■ Exemple 6.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Si on cherche les matrices carrées M telles que $AM = MA$:

1. On résout à la main par calcul $ND = DN$ (inconnue : N) pour une matrice diagonale D.
2. On cherche (si possible) une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. On revient au problème initial en sandwichant par P, P^{-1} convenablement :

$$\begin{aligned} DN = ND &\iff PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \\ &\iff \quad AM = MA \quad \text{où } M = PNP^{-1}. \end{aligned}$$

Les solutions de $AM = MA$ sont donc les matrices $M = PNP^{-1}$ où N sont les solutions du problème **1.**.

E) Application 4 : Désentrelacement de suites linéairement couplées

■ Exercice 10.
Calculer explicitement les termes généraux des suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 3u_n - 2v_n \\ v_{n+1} & = & 4u_n - 3v_n \end{array} \right.$$