Programme de colles
Semaine 13 du 5/01 au 9/01/2026

Cette semaine, les examinateurs pourront aborder des exercices plus complets de diagonalisation.

Probabilités

- Expérience aléatoire, univers Ω, événements, événement certain, événement impossible.
- Notion de tribu $\mathcal{T}$ sur Ω (aucune question sur les tribus ne doit être posée).
- Événements incompatibles, système complet d'événements.
- Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
- Propriétés d'une probabilité :
  $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$, $A \subset B \implies \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$
- Pour des événements $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 2 à 2 incompatibles, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(A_n)$ converge et $\displaystyle\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$
- Probabilité conditionnelle sachant A, notation $\mathbf{P}_A(B)$ ou $\mathbf{P}(B \mid A)$. $\mathbf{P}_A$ est une probabilité.
- Formule des probabilités composées (conditionnements successifs).
- Système quasi-complet d'événements.
- Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un système quasi-complet d'événements, alors la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(A_n \cap B)$ est convergente et $\displaystyle\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n \cap B)$.

  Si de plus pour tout n, $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$, alors $\displaystyle\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}_{A_n}(B)$.
- Formule de Bayes.
- Indépendance de 2 événements, indépendance mutuelle de n événements, d'une suite d'événements.

Diagonalisation des matrices

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre d'une matrice carrée
- Les valeurs propres d'une matrice diagonale ou triangulaire sont ses éléments diagonaux.
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres disctinctes est libre.
- Une famille obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Une matrice carrée d'ordre n admet au plus n valeurs propres distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.
- Matrices semblables. Matrice diagonalisable : elle est semblable à une matrice diagonale.
- Cas des matrices triangulaires ou diagonales.
- Une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.
- Une matrice carrée d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
- Une matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable, et n'a que des valeurs propres réelles.
- Application au calcul des puissances d'une matrice.
- Application à l'étude de suites imbriquées, de suites récurrentes linéaires.
- Application à la résolution de systèmes différentiels linéaires.
- Application à la résolution d'équations matricielles.

Questions de cours :

1. Définition d'une probabilité sur un univers Ω.
2. Définition d'une probabilité conditionnelle.
3. Définition de l'indépendance mutuelle de n événements.
4. Formule des probabilités composées.
5. Formule des probabilités totales.
6. Formule de Bayes.
7. Définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
8. Que peut-on dire d'une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ?
9. Que peut-on dire de la juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ?
10. Définition d'une matrice diagonalisable.
11. Condition sur les dimensions des sous-espaces propres pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable.
12. Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice $n \times n$ quant au nombre de ses valeurs propres.
13. Donner une condition d'inversibilité d'une matrice à l'aide de ses valeurs propres.
14. Donner deux conditions suffisantes (non nécessaires) de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.