TD 11 : variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 89

On suppose que les pièces sont produites indépendamment, chaque pièce étant « sans défaut » avec probabilité $p \in]0,1[$ et « défectueuse » avec probabilité $q = 1 - p$. On arrête au premier défaut et l'on note

$$N = \text{nombre de pièces sans défaut avant le premier défaut.}$$

Loi de N. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'événement $\{N = n\}$ signifie : n premières pièces sans défaut, puis une défectueuse. D'où

$$\boxed{\mathbb{P}(N = n) = p^n\, q, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

(c'est la loi géométrique <u>(nombre d'échecs avant le premier succès)</u> de paramètre $q = 1 - p$).

Espérance. On calcule

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p^n\, q = q \sum_{n=0}^{\infty} n\, p^n = q \cdot \frac{p}{(1-p)^2} = \boxed{\frac{p}{1-p}}.$$

(On a utilisé $\sum_{n \geq 0} n r^n = \dfrac{r}{(1-r)^2}$ pour $|r| < 1$.)

Variance. On peut utiliser $\mathrm{Var}(N) = \mathbb{E}[N(N-1)] + \mathbb{E}[N] - \mathbb{E}[N]^2$. Or

$$\mathbb{E}[N(N-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, p^n\, q = q \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, p^n = q \cdot \frac{2p^2}{(1-p)^3} = \frac{2p^2}{(1-p)^2}.$$

Donc

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{2p^2}{(1-p)^2} + \frac{p}{1-p} - \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 = \boxed{\frac{p}{(1-p)^2}}.$$

Bilan.

$$\boxed{\mathbb{P}(N = n) = p^n(1-p) \quad (n \geq 0), \qquad \mathbb{E}[N] = \frac{p}{1-p}, \qquad \mathrm{Var}(N) = \frac{p}{(1-p)^2}.}$$

Exercice 90

On lance un dé équilibré jusqu'au premier 6. À chaque non-6, on ajoute une boule rouge à une urne qui contient initialement une boule blanche. Quand un 6 apparaît, on tire une boule de l'urne et l'expérience s'arrête. On note

$$X = \text{rang du premier } 6, \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{si la boule tirée est blanche,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) **Loi de X.** Pour $n \geq 1$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}}.$$

   (b) **Probabilité d'avoir le premier six au plus tard au k-ième lancer.**

$$\boxed{\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k}}.$$

2. **Loi de Y.** Si $X = n$, alors il y a eu $n-1$ non-6 avant l'arrêt, donc l'urne contient 1 blanche et $n-1$ rouges, soit n boules au total. Ainsi

$$\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = n) = \frac{1}{n}.$$

Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = 1 \mid X = n)\,\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}.$$

On utilise l'identité valable pour $r \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{n} = -\frac{1}{r} \ln(1 - r)$$

Avec $r = \frac{5}{6}$, on obtient

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{5/6} \ln\left(1 - \frac{5}{6}\right)\right) = -\frac{1}{5} \ln\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5} \ln 6.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{5} \ln 6, \qquad \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \frac{1}{5} \ln 6}.$$

Exercice 91

Modélisation. On suppose que chaque ticket (distinct) est attribué indépendamment et uniformément à l'une des N personnes. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $I_i = \mathbf{1}_{\{\text{le ticket } i \text{ va à Alice}\}}$. Alors

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_i, \qquad \mathbb{P}(I_i = 1) = \frac{1}{N}.$$

Loi de X. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{N}\right)^{k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}}{N^{n}}.$$

$$\boxed{X \sim \mathscr{B}\left(n, \tfrac{1}{N}\right)}.$$

Espérance. Par linéarité,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[I_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{N} = \boxed{\frac{n}{N}}.$$

Variance. Pour une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$. Ici $p = \frac{1}{N}$, donc

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = n\,\frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right) = \frac{n(N-1)}{N^2}}.$$

Exercice 92

Modélisation. À chaque tirage, la probabilité de tomber sur un jeton numéroté vaut $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. On s'arrête au premier jeton numéroté, avec au plus n tirages. La variable

$$X = \text{nombre de jetons non numérotés extraits}$$

prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$.

1. **Loi de X.** Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, l'événement $\{X = k\}$ signifie : k jetons non numérotés puis un numéroté, donc
$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(\tfrac{1}{2}\right) = 2^{-(k+1)}.$$
Pour $k = n$, on a tiré n fois un jeton non numéroté :
$$\mathbb{P}(X = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$
Ainsi
$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} 2^{-(k+1)}, & 0 \leq k \leq n-1, \\ 2^{-n}, & k = n. \end{cases}}$$

2. **Espérance.** Écrivons $X = \sum_{j=1}^{n} I_j$ où $I_j = 1$ si les j premiers tirages sont non numérotés, et $I_j = 0$ sinon. Alors $\mathbb{P}(I_j = 1) = (\frac{1}{2})^j$, d'où
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(I_j = 1) = \sum_{j=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^j = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n.$$
$$\boxed{\mathbb{E}[X] = 1 - 2^{-n}}.$$

3. **Variance.** On calcule d'abord
$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n-1} k^2\, 2^{-(k+1)} + n^2\, 2^{-n} = \frac{3 \cdot 2^n - 2n - 3}{2^n} \quad \text{(somme finie obtenue par dérivation de la somme géomét}$$
Puis
$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 = \left(3 - \frac{2n+3}{2^n}\right) - \left(1 - 2^{-n}\right)^2 = \boxed{2 - \frac{2n+1}{2^n} - 2^{-2n}}.$$

Exercice 93

On lance simultanément $2n + 1$ jetons (chaque jeton montre « noir » ou « blanc » avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment). Comme $2n + 1$ est impair, le nombre de noirs est impair si et seulement si le nombre de blancs est pair, et réciproquement. On définit

$$X = \text{le nombre } \underline{\text{impair}} \text{ de jetons montrant une même couleur.}$$

Ainsi X ne prend que des valeurs impaires de $\{1, 3, \dots, 2n + 1\}$.

1. **Loi de X et vérification.** Pour $k \in \{1, 3, \dots, 2n + 1\}$, on a
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\#\text{noirs} = k) + \mathbb{P}(\#\text{blancs} = k) = \frac{\binom{2n+1}{k}}{2^{2n+1}} + \frac{\binom{2n+1}{2n+1-k}}{2^{2n+1}} = \frac{\binom{2n+1}{k}}{2^{2n}}.$$
Donc
$$\boxed{\forall k \in \{1, 3, \dots, 2n + 1\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{2n+1}{k}}{2^{2n}}}.$$

Vérifions que c'est bien une loi de probabilité :

$$\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot 2^{2n} = 1,$$

car pour $N = 2n+1$ impair, $\sum_{k \text{ impair}} \binom{N}{k} = 2^{N-1} = 2^{2n}$.
En effet, on propose deux preuves :
On pose, pour un entier $N \geq 1$,

$$E = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{N} \binom{N}{k}, \qquad O = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{N} \binom{N}{k}.$$

Preuve algébrique. Par la formule du binôme,

$$(1+1)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = E + O = 2^N,$$

et

$$(1-1)^N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} = E - O = 0.$$

On en déduit $E = O = 2^{N-1}$, donc en particulier

$$\boxed{\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{N} \binom{N}{k} = 2^{N-1}}.$$

(Cette égalité vaut pour tout $N \geq 1$; elle s'applique donc à $N = 2n+1$.)

Preuve combinatoire. Les $\binom{N}{k}$ comptent les sous-ensembles de $\{1, \ldots, N\}$ de taille k. Si N est impair, le passage à l'ensemble complémentaire envoie un sous-ensemble de taille k sur un sous-ensemble de taille $N-k$, de parité opposée. Il y a donc autant de sous-ensembles de taille paire que de taille impaire, soit 2^{N-1} chacun.

2. **Espérance de X.** On calcule

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n+1} k\, \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n+1} k \binom{2n+1}{k}.$$

Or, (c'est justifié ensuite) pour $N \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} = N\, 2^{N-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{N} (-1)^k k \binom{N}{k} = 0,$$

d'où (en séparant pairs/impairs) $\displaystyle\sum_{k \text{ impair}} k \binom{N}{k} = \frac{1}{2} N\, 2^{N-1} = N\, 2^{N-2}$. Avec $N = 2n+1$, on obtient

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2^{2n}} (2n+1)\, 2^{2n-2} = \boxed{\frac{2n+1}{2}}.$$

Justification algébrique (par dérivation du binôme). Pour tout $N \geq 1$,

$$(1+x)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k.$$

En dérivant,

$$N(1+x)^{N-1} = \sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} x^{k-1}.$$

En multipliant par x,

$$x\, N(1+x)^{N-1} = \sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} x^k.$$

En prenant $x = 1$,

$$\sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} = N\, 2^{N-1}.$$

En prenant $x = -1$ et $N \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k k \binom{N}{k} = (-1)\, N(1-1)^{N-1} = 0.$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} = N\, 2^{N-1}, \qquad \sum_{k=0}^{N} (-1)^k k \binom{N}{k} = 0 \ (N \geq 2).}$$

Justification combinatoire (pour la première identité). Soit $\Omega = \{1, \ldots, N\}$. Comptons le nombre de paires (S, i) avec $S \subset \Omega$ et $i \in S$, de deux façons.
• Somme sur les sous-ensembles : pour chaque S avec $|S| = k$, il y a k choix de $i \in S$. Ainsi le nombre total vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k}$.
• Somme sur les éléments distingués : pour chaque $i \in \Omega$, le nombre de $S \subset \Omega$ contenant i est 2^{N-1}. Donc le total vaut $N\, 2^{N-1}$.
Égalité des deux comptages :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} = N\, 2^{N-1}.}$$

Exercice 94

On numérote les hauteurs $1, 2, \ldots$. À la hauteur n, la probabilité de succès est $1/n$. On s'arrête au premier échec et l'on note

$$X = \text{nombre de haies sautées avec succès.}$$

(On suppose les tentatives indépendantes.)

1. **Loi de X et vérification de la somme.** Pour $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \frac{1}{k!}, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

Comme $X \geq 1$, on a bien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = 1.$$

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{(k+1)!}}$$

2. (a) **Calcul de $\mathbb{E}(X+1)$ et $\mathbb{E}\big((X+1)(X-1)\big)$.**

   Formule des queues : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 1$. Ainsi

   $$\boxed{\mathbb{E}(X+1) = e}.$$

   De plus, $(X+1)(X-1) = X^2 - 1$. Or $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big) + \mathbb{E}(X)$. On utilise

   $$\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 2,$$

   ou plus élégamment la formule des queues $\mathbb{E}\big(X(X-1)\big) = 2\sum_{j=2}^{\infty}(j-1)\,\mathbb{P}(X \geq j) = 2\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j-1}{j!} = 2.$

   Donc

   $$\mathbb{E}(X^2) = 2 + (e-1) = e + 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbb{E}\big((X+1)(X-1)\big) = \mathbb{E}(X^2) - 1 = e}.$$

   (b) **Espérance et variance de X.** Des résultats précédents,

   $$\boxed{\mathbb{E}(X) = e - 1}, \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = (e+1) - (e-1)^2 = \boxed{3e - e^2}.$$

Exercice 95

On note $q = 1 - p$. À chaque saut, on avance de $+1$ avec probabilité p et de -1 avec probabilité q, indépendamment.

1. **Dix sauts.**

   — Retour à l'origine après 10 sauts. Il faut 5 montées et 5 descentes :

   $$\boxed{\mathbb{P}(S_{10} = 0) = \binom{10}{5} p^5 q^5}.$$

   — Être à deux pas de l'origine après 10 sauts. Il faut un écart ± 2, donc 6 montées et 4 descentes ou 4 montées et 6 descentes :

   $$\boxed{\mathbb{P}(|S_{10}| = 2) = \binom{10}{6} p^6 q^4 + \binom{10}{4} p^4 q^6}.$$

2. **Arrêt au premier double saut dans le même sens.** On définit X comme le nombre de sauts effectués avant l'arrêt (deux sauts consécutifs identiques).

   Loi de X. Écrivons $k \geq 2$. Pour s'arrêter exactement au k-ième saut, il faut que les $k-1$ premiers sauts alternent, puis que le k-ième répète le $(k-1)$-ième. En distinguant le premier saut ($+1$ ou -1) :
   - si $k = 2m$ est pair ($m \geq 1$) :

   $$\boxed{\mathbb{P}(X = 2m) = (pq)^{m-1}\,(p^2 + q^2)};$$

   - si $k = 2m + 1$ est impair ($m \geq 1$) :

   $$\boxed{\mathbb{P}(X = 2m+1) = (pq)^m}.$$

Vérification de la somme :

$$\sum_{m\geq 1}(pq)^{m-1}(p^2+q^2)+\sum_{m\geq 1}(pq)^m=\frac{p^2+q^2}{1-pq}+\frac{pq}{1-pq}=\frac{1-pq}{1-pq}=1.$$

<u>Espérance de X.</u> Posons $r=pq\in\,]0,\frac{1}{4}]$. Alors

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{m\geq 1}(2m)\,(r)^{m-1}(p^2+q^2)+\sum_{m\geq 1}(2m+1)\,r^m.$$

En utilisant $\sum_{m\geq 1} mr^{m-1}=\dfrac{1}{(1-r)^2}$, $\sum_{m\geq 1} mr^m=\dfrac{r}{(1-r)^2}$ et $\sum_{m\geq 1} r^m=\dfrac{r}{1-r}$, on obtient

$$\mathbb{E}[X]=\frac{2(p^2+q^2)}{(1-r)^2}+\frac{2r}{(1-r)^2}+\frac{r}{1-r}=\frac{2(1-r)}{(1-r)^2}+\frac{r}{1-r}=\boxed{\mathbb{E}[X]=\frac{2+pq}{1-pq}}.$$

Pour $p=q=\frac{1}{2}$, on retrouve $\mathbb{E}[X]=3$.

Exercice 96

Convention. On prend $X\sim$ géométrique(p) à valeurs dans $\mathbf{N}=\{0,1,2,\ldots\}$, i.e.

$$\forall k\in\mathbf{N},\qquad \mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^k.$$

Le compteur affiche $Y\in\{0,1,\ldots,N\}$ tel que

$$Y=\begin{cases}X, & \text{si } X\leq N,\\ U, & \text{si } X>N, \text{ où } U \text{ est uniforme sur } \{0,\ldots,N\} \text{ et indépendant de } X.\end{cases}$$

Loi de Y. Pour $y\in\{0,\ldots,N\}$,

$$\mathbb{P}(Y=y)=\underbrace{\mathbb{P}(X=y)}_{=p(1-p)^y}+\underbrace{\mathbb{P}(X>N)}_{=(1-p)^{N+1}}\cdot\underbrace{\mathbb{P}(U=y)}_{=\frac{1}{N+1}}=p(1-p)^y+\frac{(1-p)^{N+1}}{N+1}.$$

$$\boxed{\forall y\in\{0,\ldots,N\},\quad \mathbb{P}(Y=y)=p(1-p)^y+\frac{(1-p)^{N+1}}{N+1}}.$$

Vérification rapide :

$$\sum_{y=0}^{N}\mathbb{P}(Y=y)=p\sum_{y=0}^{N}(1-p)^y+\frac{N+1}{N+1}(1-p)^{N+1}=\big(1-(1-p)^{N+1}\big)+(1-p)^{N+1}=1.$$

Espérance de Y. On écrit

$$\mathbb{E}[Y]=\sum_{y=0}^{N}y\,p(1-p)^y+\frac{(1-p)^{N+1}}{N+1}\sum_{y=0}^{N}y.$$

Avec $r=1-p$ et la somme géométrique pondérée $\sum_{y=0}^{N} yr^y=\dfrac{r\big(1-(N+1)r^N+Nr^{N+1}\big)}{(1-r)^2}$, on obtient

$$\mathbb{E}[Y]=\frac{r\big(1-(N+1)r^N+Nr^{N+1}\big)}{1-r}+\frac{N}{2}\,r^{N+1}\quad\text{où } r=1-p.$$

Une forme compacte en fonction de p est

$$\boxed{\mathbb{E}[Y]=\frac{1-p}{p}-\frac{1+\dfrac{Np}{2}}{p}(1-p)^{N+1}}.$$

(Quand $N\to+\infty$, on retrouve $\mathbb{E}[Y]\to\dfrac{1-p}{p}=\mathbb{E}[X]$.)

Exercice 97

Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Posons

$$P_{\text{pair}} = \mathbb{P}(X \text{ est pair}), \qquad P_{\text{impair}} = \mathbb{P}(X \text{ est impair}).$$

On a d'une part $P_{\text{pair}} + P_{\text{impair}} = 1$. D'autre part,

$$P_{\text{pair}} - P_{\text{impair}} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(-\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} \, e^{-\lambda} = e^{-2\lambda}.$$

En résolvant ce système,

$$\boxed{P_{\text{pair}} = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}, \qquad P_{\text{impair}} = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2}.}$$

En particulier, pour $\lambda > 0$, on a $P_{\text{pair}} > P_{\text{impair}}$ (et $P_{\text{pair}} = P_{\text{impair}} = \frac{1}{2}$ uniquement si $\lambda = 0$).

Exercice 98

On effectue des tirages avec remise dans $\{1, \ldots, n\}$ jusqu'à obtenir une non-décroissance. Soit

$$X_n = \text{nombre de tirages effectués.}$$

Alors $X_n \in \{2, 3, \ldots, n+1\}$.

1. **Calcul de $P(X_n > j)$ puis $P(X_n = j)$.**
   Avoir $X_n > j$ signifie que les j premiers tirages sont strictement décroissants :

   $$a_1 > a_2 > \cdots > a_j.$$

   Pour $j \in [\![1, n]\!]$, il faut que les j valeurs soient toutes distinctes (probabilité $\frac{(n)_j}{n^j}$, avec $(n)_j = n(n-1)\cdots(n-j+1)$), et parmi les $j!$ ordres possibles d'un j-uplet distinct, un seul est décroissant. Ainsi

   $$\boxed{P(X_n > j) = \frac{(n)_j}{n^j \, j!} \quad \text{pour } j \in [\![1, n]\!], \qquad P(X_n > j) = 0 \text{ pour } j \geq n+1.}$$

   (On a aussi $P(X_n > 0) = 1$ par convention.)
   Par différence,

   $$\boxed{P(X_n = j) = P(X_n > j-1) - P(X_n > j) \quad \text{pour } j \geq 1.}$$

   En particulier

   $$\boxed{P(X_n = 1) = 0, \qquad P(X_n = j) = \frac{(n)_{j-1}}{n^{j-1}(j-1)!} - \frac{(n)_j}{n^j j!} \;\; (2 \leq j \leq n), \qquad P(X_n = n+1) = \frac{1}{n^n}.}$$

2. **Limites quand n tend vers $+\infty$ (pour j fixé).**
   Comme $\frac{(n)_j}{n^j}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini,

   $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(X_n > j) = \frac{1}{j!} \;\; (j \geq 1).}$$

   Par suite, pour $j \geq 2$,

   $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(X_n = j) = \frac{1}{(j-1)!} - \frac{1}{j!} = \frac{j-1}{j!}, \qquad \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} P(X_n = n+1) = 0.}$$