TD 12 : intégrales généralisées

Exercice 99

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx.$

   Convergence et calcul par intégrales sur un segment. Pour $R > 0$, poser $I_1(R) = \int_0^R x\,e^{-x^2}\,dx$. Une primitive sur $[0,R]$ est $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, donc

   $$I_1(R) = \frac{1}{2}\bigl(1 - e^{-R^2}\bigr).$$

   La fonction $R \mapsto I_1(R)$ est croissante et bornée par $\frac{1}{2}$, donc l'intégrale impropre converge, et

   $$\boxed{I_1 = \lim_{R\to+\infty} I_1(R) = \frac{1}{2}}.$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\arctan x|}{1+x^2}\,dx.$

   Pour $R > 0$, poser

   $$I_2(R) = \int_{-R}^{R} \frac{|\arctan x|}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^R \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx.$$

   Changement de variable $x = \tan t$ avec $t \in \bigl[0, \arctan R\bigr]$; alors $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$ et $1 + x^2 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, d'où

   $$I_2(R) = 2\int_0^{\arctan R} t\,dt = (\arctan R)^2.$$

   La limite $\lim_{R\to+\infty}(\arctan R)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ existe, donc l'intégrale impropre converge et

   $$\boxed{I_2 = \frac{\pi^2}{4}}.$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x + 1}\,dx.$

   Pour $R > 0$, poser

   $$I_3(R) = \int_0^R \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int_0^R \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\!\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^R.$$

   Ainsi

   $$I_3(R) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\!\left(\frac{2R-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6}\right).$$

   La limite $\lim_{R\to+\infty} I_3(R) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ existe, donc

   $$\boxed{I_3 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}}.$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\, dx.$
Pour $R > 1$, poser
$$I_4(R) = \int_1^R \frac{\arctan x}{x^2}\, dx.$$
Intégration par parties sur $[1, R]$ avec $u = \arctan x$, $dv = x^{-2}dx$ ($du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = -\dfrac{1}{x}$) :
$$I_4(R) = \left[-\frac{\arctan x}{x}\right]_1^R + \int_1^R \frac{dx}{x(1+x^2)}.$$
On a alors
$$\int_1^R \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{1}{2}\int_1^{R^2} \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{1}{2}\left[\ln t - \ln(1+t)\right]_1^{R^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2R^2}{1+R^2}\right).$$
Donc
$$I_4(R) = -\frac{\arctan R}{R} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2R^2}{1+R^2}\right).$$
Les deux limites $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \frac{\arctan R}{R} = 0$ et $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \ln\left(\frac{2R^2}{1+R^2}\right) = \ln 2$ existent, d'où la convergence de l'intégrale impropre et
$$\boxed{I_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}}.$$

5. $I_5 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\, dx.$
Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, poser
$$I_5(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\, dx.$$
Changement de variable $t = \sqrt{1-x}$ ($x = 1 - t^2$, $dx = -2t\, dt$) : quand x va de ε à 1, t va de $\sqrt{1-\varepsilon}$ à 0. Alors
$$I_5(\varepsilon) = 2\int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \ln(1-t^2)\, dt = 2\int_0^{\sqrt{1-\varepsilon}} \big(\ln(1-t) + \ln(1+t)\big)\, dt.$$
Pour $a \in [0, 1[$,
$$\int_0^a \ln(1-t)\, dt = (1-a)\ln(1-a) - a, \qquad \int_0^a \ln(1+t)\, dt = (1+a)\ln(1+a) - a.$$
Avec $a = \sqrt{1-\varepsilon}$,
$$I_5(\varepsilon) = 2\Big((1-a)\ln(1-a) - a + (1+a)\ln(1+a) - a\Big).$$
En faisant tendre ε vers 0 (donc a tend vers 1), on utilise $(1-a)\ln(1-a)$ tend vers 0 et $(1+a)\ln(1+a)$ tend vers $2\ln 2$. On obtient
$$\boxed{I_5 = \lim_{\varepsilon\to 0} I_5(\varepsilon) = 4(\ln 2 - 1)}.$$

Exercice 100

Soit $a > 0$ et, pour $n \in \mathbf{N}$,
$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax}\, dx.$$

1. **Convergence.** Pour $R>0$, poser
$$I_n(R)=\int_0^R x^n e^{-ax}\,dx.$$
Pour $n=0$,
$$I_0(R)=\int_0^R e^{-ax}\,dx=\frac{1}{a}\big(1-e^{-aR}\big),$$
et $\lim_{R\to+\infty} I_0(R)=\frac{1}{a}$ existe.
Pour $n\geq 1$, intégration par parties sur $[0,R]$ avec $u=x^n$, $dv=e^{-ax}\,dx$ ($du=nx^{n-1}dx$, $v=-\frac{1}{a}e^{-ax}$) :
$$I_n(R)=\left[-\frac{1}{a}\,x^n e^{-ax}\right]_0^R+\frac{n}{a}\int_0^R x^{n-1}e^{-ax}\,dx=-\frac{1}{a}R^n e^{-aR}+\frac{n}{a}I_{n-1}(R).$$
Le terme de bord $R^n e^{-aR}$ tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$ (l'exponentielle l'emporte sur toute puissance), et $\lim_{R\to+\infty} I_{n-1}(R)$ existe par récurrence sur n. Ainsi $\lim_{R\to+\infty} I_n(R)$ existe pour tout n, donc
$$\boxed{I_n \text{ converge pour tout } n\in\mathbf{N}.}$$
2. **Relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.** En repartant de l'intégration par parties sur $[0,R]$ avec $u=x^{n+1}$, $dv=e^{-ax}\,dx$,
$$I_{n+1}(R)=-\frac{1}{a}R^{n+1}e^{-aR}+\frac{n+1}{a}\,I_n(R).$$
En faisant tendre R vers $+\infty$ (le terme de bord tend vers 0), on obtient
$$\boxed{I_{n+1}=\frac{n+1}{a}\,I_n\quad(n\in\mathbf{N}).}$$
3. **Formule explicite.** On a déjà $I_0=\lim\limits_{R\to+\infty} I_0(R)=\dfrac{1}{a}$. Par récurrence, la relation précédente donne
$$I_1=\frac{1}{a}I_0=\frac{1}{a^2},\quad I_2=\frac{2}{a}I_1=\frac{2!}{a^3},\ \ldots\ ,$$
et, en général,
$$\boxed{I_n=\frac{n!}{a^{n+1}}\quad(n\in\mathbf{N}).}$$

Exercice 101

Soit $n\in\mathbf{N}^*$. On pose
$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{n+x}\,dx\quad\text{et}\quad J_n=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{(n+x)^2}\,dx.$$
1. **Convergence de I_n.** Pour $R>0$, poser
$$I_n(R)=\int_0^R\frac{e^{-x}}{n+x}\,dx.$$
On a, pour tout $x\geq 0$, $\dfrac{e^{-x}}{n+x}\leq\dfrac{e^{-x}}{n}$. Donc
$$0\leq I_n(R)\leq\frac{1}{n}\int_0^R e^{-x}\,dx=\frac{1}{n}\big(1-e^{-R}\big)\leq\frac{1}{n}.$$
La fonction d'intégration étant positive, $R\mapsto I_n(R)$ est croissante et bornée, la limite $\lim_{R\to+\infty} I_n(R)$ existe. On note
$$\boxed{I_n=\lim_{R\to+\infty} I_n(R)\ \ \text{(convergence)}}.$$

2. **Limite de $(I_n)_{n\geq 1}$.** Pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x}\,dx \leq \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{n}.$$

Ainsi I_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, et même $nI_n \leq 1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}.$$

3. **Convergence de J_n et relation $I_n = \dfrac{1}{n} - J_n$.** Pour $R > 0$, poser

$$J_n(R) = \int_0^R \frac{e^{-x}}{(n+x)^2}\,dx.$$

Intégration par parties sur $[0, R]$ pour $I_n(R)$ avec

$$u = \frac{1}{n+x}, \quad dv = e^{-x}\,dx \quad \Big(du = -\frac{dx}{(n+x)^2},\ v = -e^{-x}\Big) :$$

$$I_n(R) = \Big[-\frac{e^{-x}}{n+x}\Big]_0^R - \int_0^R (-e^{-x})\Big(-\frac{dx}{(n+x)^2}\Big) = \frac{1}{n} - \frac{e^{-R}}{n+R} - J_n(R).$$

Donc, pour tout $R > 0$,

$$\boxed{I_n(R) = \frac{1}{n} - \frac{e^{-R}}{n+R} - J_n(R)}.$$

Par ailleurs, $0 \leq J_n(R) \leq \frac{1}{n^2}\int_0^R e^{-x}\,dx \leq \frac{1}{n^2}$. La fonction d'intégration étant positive, $R \mapsto J_n(R)$ est croissante et bornée, donc $\lim_{R\to+\infty} J_n(R)$ existe. On note cette limite J_n. En faisant tendre R vers $+\infty$ dans l'égalité précédente (le terme $\dfrac{e^{-R}}{n+R}$ tend vers 0), on obtient

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n} - J_n}.$$

En particulier,

$$0 \leq nJ_n \leq \frac{1}{n} \quad\Longrightarrow\quad nJ_n \text{ tend vers } 0,$$

d'où

$$nI_n = 1 - nJ_n \text{ tend vers } 1.$$

Ainsi

$$\boxed{I_n \sim \frac{1}{n} \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}.$$

Exercice 102

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad \text{et} \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

1. **Convergence de I_n.** Pour $R > 0$, poser

$$I_n(R) = \int_0^R \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Changement de variable $x = \tan t$ avec $t \in [0, \arctan R]$. Alors $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ et $1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}$, d'où

$$I_n(R) = \int_0^{\arctan R} \cos^{2n-2} t \, dt.$$

La fonction $t \mapsto \cos^{2n-2} t$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et $\arctan R$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque R tend vers $+\infty$. Par continuité de la fonction primitive $u \mapsto \int_0^u \cos^{2n-2} t \, dt$, la limite $\lim_{R\to+\infty} I_n(R)$ existe et

$$\boxed{I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t \, dt \; < +\infty \, .}$$

2. **Relation $I_n - I_{n+1}$ (intégration par parties).** Pour $R > 0$,

$$I_n(R) - I_{n+1}(R) = \int_0^R \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \, dx.$$

Poser $u = x$, $dv = \dfrac{x \, dx}{(1+x^2)^{n+1}}$. Alors $du = dx$ et

$$v = \int \frac{x \, dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{-n-1} \, d(1+x^2) = -\frac{1}{2n} (1+x^2)^{-n}.$$

Sur $[0, R]$, l'intégration par parties donne

$$I_n(R) - I_{n+1}(R) = \Big[-\frac{x}{2n}(1+x^2)^{-n} \Big]_0^R + \frac{1}{2n} \int_0^R (1+x^2)^{-n} \, dx = \frac{1}{2n} \, I_n(R) \; - \; \frac{R}{2n}(1+R^2)^{-n}.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, le terme de bord $\dfrac{R}{2n}(1+R^2)^{-n}$ tend vers 0, donc

$$\boxed{I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n} \, I_n \quad \Longleftrightarrow \quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} \, I_n \, .}$$

3. **Formule explicite de I_n.** On a d'abord

$$I_1 = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x \Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Par récurrence à partir de l'item 2,

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{1}{2} \, I_1 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2k}.$$

On peut écrire, pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{I_n = \frac{\pi}{2} \, \frac{(2n-2)!}{2^{\,2n-2} \big((n-1)!\big)^2} \, .}$$

4. **Étude de J_n.** Pour $R > 0$,

$$J_n(R) = \int_{-R}^R \frac{dx}{(1+x^2)^n} = 2 \int_0^R \frac{dx}{(1+x^2)^n} = 2 \, I_n(R).$$

La limite $\lim_{R\to+\infty} J_n(R)$ existe donc et vaut $2I_n$, soit

$$\boxed{J_n = 2I_n = \pi \, \frac{(2n-2)!}{2^{\,2n-2} \big((n-1)!\big)^2} \, .}$$

Exercice 103

On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n-1)x\big)}{\sin x}\, dx.$$

1. **Existence.** Pour $\varepsilon \in]0, \pi/2[$, poser

   $$I_n(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n-1)x\big)}{\sin x}\, dx.$$

   Notons $f_n(x) = \dfrac{\sin\big((2n-1)x\big)}{\sin x}$ pour $x \in]0, \pi/2]$. Au voisinage de 0,

   $$\sin\big((2n-1)x\big) = (2n-1)x + o(x), \qquad \sin x = x + o(x),$$

   d'où

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\big((2n-1)x\big)}{\sin x} = 2n-1.$$

   On prolonge f_n par continuité en 0 en posant $f_n(0) = 2n-1$: ainsi f_n est continue sur $[0, \pi/2]$. Par conséquent, la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_n(\varepsilon)$ existe et

   $$\boxed{I_n = \lim_{\varepsilon\to 0} I_n(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\, dx}.$$

2. **Différence $I_{n+1} - I_n$.**

   $$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big) - \sin\big((2n-1)x\big)}{\sin x}\, dx = \int_0^{\pi/2} 2\cos(2nx)\, dx = \left[\tfrac{\sin(2nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} = 0.$$

   $$\boxed{I_{n+1} - I_n = 0}.$$

3. **Valeur de I_n.** L'item précédent montre que $(I_n)_n$ est constante. On calcule $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

   $$\boxed{I_n = \frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 104

On pose

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx, \qquad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx.$$

1. **Convergence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln x\, dx$.**
   Pour $\varepsilon \in]0, \pi/2[$, poser

   $$A(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{\pi/2} \ln x\, dx = \big[x\ln x - x\big]_\varepsilon^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\ln\Big(\frac{\pi}{2}\Big) - \frac{\pi}{2} - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon.$$

   Comme $\varepsilon \ln \varepsilon$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0, la limite $\lim_{\varepsilon\to 0} A(\varepsilon)$ existe. Ainsi

   $$\boxed{\int_0^{\pi/2} \ln x\, dx \text{ est une intégrale impropre convergente.}}$$

2. **Étude de** $g(x) = \ln(\sin x) - \ln x$ sur $]0, \pi/2]$ et convergence de I.
   Pour $\varepsilon \in]0, \pi/2[$, poser
$$G(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} g(x)\, dx.$$
   On a
$$g(x) = \ln\Big(\frac{\sin x}{x}\Big), \qquad \frac{\sin x}{x} \text{ tend vers 1 quand } x \text{ tend vers 0},$$
   donc $g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. On prolonge g par continuité en posant $g(0) = 0$; alors g est continue sur $[0, \pi/2]$ et la limite $\lim_{\varepsilon \to 0} G(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} g(x)\, dx$ existe. Écrire
$$I = \int_0^{\pi/2} \ln x \, dx + \int_0^{\pi/2} g(x)\, dx$$
   montre que I est une intégrale impropre convergente (le premier terme converge par l'item 1, le second est une intégrale sur un segment d'une fonction continue).
3. (a) **Deux calculs de $I + J$ et conclusion.**
   Première écriture (par décalage dans J). Pour $\varepsilon \in]0, \pi/2[$, poser
$$S(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx.$$
   Dans le second terme, faire le changement de variable $t = x + \frac{\pi}{2}$ (alors $\cos x = \sin t$, $x \in [\varepsilon, \pi/2]$ donne $t \in [\pi/2 + \varepsilon, \pi]$) :
$$S(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx + \int_{\pi/2+\varepsilon}^{\pi} \ln(\sin t)\, dt = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \ln(\sin u)\, du.$$
   En faisant tendre ε vers 0, on obtient
$$\boxed{I + J = \lim_{\varepsilon \to 0} S(\varepsilon) = \int_0^{\pi} \ln(\sin u)\, du.}$$
   Seconde écriture (formule d'angle double sur un segment tronqué). Pour $\varepsilon \in]0, \pi/2[$,
$$S(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\big(\sin x \cos x\big)\, dx = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \Big(\ln \frac{1}{2} + \ln(\sin 2x)\Big)\, dx = \Big(\tfrac{\pi}{2} - \varepsilon\Big) \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{2\varepsilon}^{\pi} \ln(\sin u)\, du,$$
   où l'on a posé $u = 2x$. D'où
$$\lim_{\varepsilon \to 0} S(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin u)\, du.$$
   En comparant avec la première écriture,
$$I + J = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(I + J) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I + J = -\pi \ln 2.}$$
   (b) **Égalité $I = J$ et valeurs.** Sur $[0, \pi/2]$, le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ donne
$$J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt = I,$$
   donc $2I = I + J = -\pi \ln 2$, d'où
$$\boxed{I = J = -\frac{\pi}{2} \ln 2.}$$