# TD 13 : variables aléatoires à densité

## Exercice 105

1. **Vérification que $f$ est une densité.** Sur $[-1,0]$, $f(x) = 1 + x \geq 0$ ; sur $[0,1]$, $f(x) = 1 - x \geq 0$ ; ailleurs $f(x) = 0$. De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (1+x)\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\,dx = \left[x + \tfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[x - \tfrac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}.}$$

2. **Densité de $Y = \min(X_1, X_2)$ pour $X_1, X_2$ i.i.d. de densité $f$.** Notons $F$ la fonction de répartition de $X$. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > y,\ X_2 > y) = 1 - \big(1 - F(y)\big)^2.$$

Ainsi, là où $F$ est dérivable, une densité de $Y$ est donnée par

$$g_Y(y) = F_Y'(y) = 2\big(1 - F(y)\big)\, f(y).$$

On calcule d'abord $F$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

En déduisant $g_Y$ (et en posant $g_Y = 0$ hors de $[-1,1]$) :

$$\boxed{g_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq -1, \\ 2\Big(\dfrac{1}{2} - y - \dfrac{y^2}{2}\Big)(1+y) = 1 - y - 3y^2 - y^3 & \text{si } -1 < y < 0, \\ 2\Big(\dfrac{1}{2} - y + \dfrac{y^2}{2}\Big)(1-y) = 1 - 3y + 3y^2 - y^3 & \text{si } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{si } y \geq 1. \end{cases}}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (en particulier $g_Y(0^-) = g_Y(0^+) = 1$) et s'annule aux bords $-1$ et 1. Elle constitue bien une densité de $Y$.

## Exercice 106

1. **Montrer que $f$ est une densité.** Sur $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$. Pour l'intégrale totale, on tronque puis on passe à la limite. Pour $R > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \underset{1}{x e^{-x^2/2}}\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{0}^{R} x e^{-x^2/2}\,dx.$$

Posons $u = \frac{x^2}{2}$ sur $[0, R]$. Alors $du = x\,dx$ et

$$\int_0^R xe^{-x^2/2}\,dx = \int_0^{R^2/2} e^{-u}\,du = 1 - e^{-R^2/2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 1.$$

Donc

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}.}$$

2. **Soit $X$ de densité $f$.**
   (a) **Loi de $Y = X^2$.** Pour $y < 0$, $F_Y(y) = 0$. Pour $y \geq 0$,

   $$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(0 \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} xe^{-x^2/2}\,dx = 1 - e^{-y/2}.$$

   Ainsi, pour $y \geq 0$, $F_Y'(y) = \dfrac{1}{2}e^{-y/2}$, et $F_Y'(y) = 0$ sinon. Donc

   $$\boxed{Y \text{ a une loi exponentielle de paramètre } \tfrac{1}{2} \text{ (densité } y \mapsto \tfrac{1}{2}e^{-y/2} \text{ sur } [0, +\infty[)}\,.$$

   (Équivalemment : $Y$ suit une loi $\chi^2$ à 2 degrés de liberté, ou encore une loi $\Gamma(k = 1, \theta = 2)$.)

   (b) **Espérance et variance de $Y$.** Pour une exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$,

   $$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda} = 2, \qquad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2} = 4.$$

   $$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 2\,, \quad \mathrm{Var}(Y) = 4}\,.$$

# Exercice 107

1. **Loi de $Y = \sqrt{X}$ si $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.**
   Pour $y < 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = 0$. Pour $y \geq 0$,

   $$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y^2) = \int_0^{y^2} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda y^2}.$$

   Ainsi, une densité de $Y$ est, pour $y \in \mathbb{R}$,

   $$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} 2\lambda\, y\, e^{-\lambda y^2} & \text{si } y \in [0, +\infty[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

   (Il s'agit de la loi de Rayleigh de paramètre $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.)

2. **Espérance et variance de $Y$ (si elles existent).**
   Espérance. Pour $R > 0$, poser

   $$E_R = \int_0^R y\, f_Y(y)\,dy = \int_0^R 2\lambda\, y^2 e^{-\lambda y^2}\,dy.$$

   Par le changement de variable $t = y^2$ puis $s = \lambda t$,

   $$E_R = \lambda \int_0^{R^2} t^{1/2} e^{-\lambda t}\,dt = \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\lambda R^2} s^{1/2} e^{-s}\,ds.$$

La limite $\lim_{R\to+\infty} E_R = \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} s^{1/2} e^{-s}\, ds$ existe, et $\int_0^{+\infty} s^{1/2} e^{-s}\, ds = \Gamma\big(\frac{3}{2}\big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}}.$$

Moment d'ordre 2. On a $Y^2 = X$, donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}}.$$

Par suite,

$$\boxed{\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2 = \frac{1}{\lambda} - \frac{\pi}{4\lambda} = \frac{4-\pi}{4\lambda}}.$$

## Exercice 108

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Z = 1 - 2X$. On peut raisonner de deux façons équivalentes.
Par transformation affine d'une normale. Pour tout réel $a \neq 0$ et $b$, si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $aX + b \sim \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$. Ici $a = -2$, $b = 1$, $m = 0$, $\sigma^2 = 1$, donc

$$\mathbb{E}(Z) = 1 - 2 \cdot 0 = 1, \qquad \mathrm{Var}(Z) = (-2)^2 \cdot 1 = 4.$$

Ou par densité (changement de variable). Avec la densité standard $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, pour $z \in \mathbb{R}$,

$$f_Z(z) = \varphi\left(\frac{1-z}{2}\right) \cdot \left|\frac{d}{dz}\frac{1-z}{2}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-1)^2}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 4}} \exp\left(-\frac{(z-1)^2}{2 \cdot 4}\right).$$

Dans les deux cas, on obtient

$$\boxed{Z \sim \mathcal{N}(1, 4)}.$$

## Exercice 109

1. **Vérifier que $f$ est une densité et discuter l'espérance.** Pour $\alpha > 0$, $f(x) = \dfrac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)} \geq 0$. Pour $R > 0$, par parité,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to+\infty} 2 \int_0^R \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{R}{\alpha}\right) = 1.$$

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}}.$$

Pour l'espérance, considérer l'intégrale impropre de $|x|f(x)$. Pour $R > 0$,

$$\int_0^R \frac{x\,\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}\, dx = \frac{\alpha}{2\pi} \ln(\alpha^2 + R^2) \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } R \text{ tend vers } +\infty.$$

Ainsi $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x)\, dx$ diverge, et l'espérance (au sens probabiliste) n'existe pas.

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ n'existe pas}}.$$

*Dans la suite, on fixe $\alpha = 1$, donc* $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$ (loi de Cauchy standard).

2. **Identité d'angle auxiliaire.** Pour $x > 0$, écrire $y = \arctan x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$. Alors $\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \dfrac{1}{\tan y} = \dfrac{1}{x} > 0$ et, comme arctan prend ses valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\boxed{\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0)}.$$

Pour $x < 0$, on a $y = \arctan x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ et $\frac{\pi}{2} - y \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Le représentant dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est alors $-\frac{\pi}{2} - y$, d'où

$$\boxed{\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (x < 0)}.$$

3. **Équivalent de la queue $P(X > x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.** La fonction de répartition de $X$ est $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} \arctan x$. Pour $x > 0$,

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme $\arctan u \sim u$ lorsque $u$ tend vers 0, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(X > x) \sim \frac{1}{\pi x} \quad (x \text{ tend vers } +\infty)}.$$

4. **Loi de $Z_n = \dfrac{1}{n} \max(X_1, \dots, X_n)$ et limite.** Soit $F$ la répartition de $X$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{Z_n}(x) = \mathbb{P}\Big(\max_{1 \le i \le n} X_i \le nx\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \le nx) = \big(F(nx)\big)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(nx)\right)^n.$$

$$\boxed{F_{Z_n}(x) = \big(F(nx)\big)^n}.$$

Pour la limite en $n$, distinguer les cas. Si $x \le 0$, alors $nx \le 0$ et $F(nx) \le \frac{1}{2}$, donc $\big(F(nx)\big)^n$ tend vers 0. Si $x > 0$, utiliser l'item 3 avec $t = nx$ :

$$F(nx) = 1 - \mathbb{P}(X > nx) = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{nx}\right) = 1 - \frac{1}{\pi n x} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors

$$\big(F(nx)\big)^n = \left(1 - \frac{1}{\pi n x} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \text{ tend vers } e^{-1/(\pi x)}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0, \\ e^{-1/(\pi x)} & \text{si } x > 0, \end{cases}}$$

c'est la loi de Fréchet de paramètre 1 et d'échelle $1/\pi$ sur $]0, +\infty[$.

# Exercice 110

1. **Constante $b$ pour que $g$ soit une densité.** Par définition,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{b}{2^t}\, dt = b \int_{1}^{+\infty} e^{-t \ln 2}\, dt = \frac{b}{\ln 2}\, e^{-t \ln 2} \Big|_{1}^{+\infty} = \frac{b}{2 \ln 2}.$$

La condition $\int g = 1$ donne $\boxed{b = 2 \ln 2}$.

2. **Loi de $Y = X - 1$. Espérance et variance de $X$.** Avec $b = 2\ln 2$, la densité de $X$ est $g(t) = \dfrac{2\ln 2}{2^t}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)$. Pour $y \geq 0$, la densité de $Y = X - 1$ est
$$f_Y(y) = g(y+1) = \frac{2\ln 2}{2^{\,y+1}} = \big(\ln 2\big)\, e^{-(\ln 2)\, y}.$$
Donc $\boxed{Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda = \ln 2)}$. Ainsi
$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1 + \frac{1}{\ln 2}}, \qquad \boxed{\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{(\ln 2)^2}}.$$

3. **Loi de $Z = \lfloor X \rfloor$.** Pour $k \in \mathbb{N}^*$ (donc $k \geq 1$),
$$\mathbb{P}(Z = k) = \int_k^{k+1} \frac{2\ln 2}{2^t}\, dt = \frac{2\ln 2}{\ln 2}\Big(e^{-t\ln 2}\Big)\Big|_k^{k+1} = 2\big(2^{-k} - 2^{-(k+1)}\big) = \boxed{2^{-k}}.$$
Donc $Z$ suit la loi géométrique sur $\{1, 2, 3, \ldots\}$ de paramètre $p = \frac{1}{2}$, avec $\mathbb{P}(Z = k) = 2^{-k}$.

## Exercice 111

1. **Loi de $X$.**
On tire l'ampoule $A$ avec probabilité $p$, puis $B$ avec probabilité $1 - p$. Les lois conditionnelles sont exponentielles :
$$X \,\big|\, \{A \text{ choisie}\} \sim \mathrm{Exp}(a), \qquad X \,\big|\, \{B \text{ choisie}\} \sim \mathrm{Exp}(b).$$
Pour tout $x \geq 0$, la densité de $X$ est donc un mélange :
$$f_X(x) = p\, a\, e^{-ax} + (1-p)\, b\, e^{-bx}.$$
Ainsi
$$\boxed{f_X(x) = p\, a\, e^{-ax} + (1-p)\, b\, e^{-bx} \quad \text{sur } [0, +\infty[\,.}$$

2. **Espérance et variance de $X$.**
On utilise ici les faits connus sur la loi exponentielle : $\mathbb{E}(\mathrm{Exp}(\lambda)) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(\mathrm{Exp}(\lambda)) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.
**Espérance.**
$$\mathbb{E}(X) = p\,\frac{1}{a} + (1-p)\,\frac{1}{b}.$$
$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{p}{a} + \frac{1-p}{b}.}$$
**Variance.** On utilise la formule de la variance totale :
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big(\,\mathrm{Var}(X \,|\, \text{ampoule})\big) + \mathrm{Var}\,\big(\mathbb{E}(X \,|\, \text{ampoule})\big).$$
Or
$$\mathrm{Var}(X \mid A) = \frac{1}{a^2}, \qquad \mathrm{Var}(X \mid B) = \frac{1}{b^2},$$
et
$$\mathbb{E}(X \mid A) = \frac{1}{a}, \qquad \mathbb{E}(X \mid B) = \frac{1}{b}.$$
Ainsi :
$$\mathrm{Var}(X) = p\,\frac{1}{a^2} + (1-p)\,\frac{1}{b^2} + p(1-p)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2.$$
On peut laisser la réponse sous cette forme, déjà simplifiée.
$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = p\,\frac{1}{a^2} + (1-p)\,\frac{1}{b^2} + p(1-p)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2.}$$

## Exercice 112

Soit $a > 0$ et $X \sim \mathcal{U}([0, a])$. On pose

$$Y = a - X, \qquad U = \max(X, Y), \qquad V = \min(X, Y).$$

1. **Loi, espérance et variance de $Y$.**
   Pour $y \in [0, a]$,
   $$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(a - X \le y) = \mathbb{P}(X \ge a - y) = \frac{y}{a},$$
   et donc $f_Y(y) = \dfrac{1}{a}$ pour $y \in [0, a]$ (et 0 sinon). Ainsi
   $$\boxed{Y \sim \mathcal{U}([0, a])}, \qquad \boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{a}{2}}, \qquad \boxed{\mathrm{Var}(Y) = \frac{a^2}{12}}.$$

2. **Loi, espérance et variance de $U = \max(X, Y)$.**
   Comme $Y = a - X$, on a $U = \max(X, a - X) = \dfrac{a}{2} + |X - \dfrac{a}{2}|$, donc $U \in \left[\dfrac{a}{2}, a\right]$. Pour $u \in \left[\dfrac{a}{2}, a\right]$,
   $$F_U(u) = \mathbb{P}(U \le u) = \mathbb{P}(\max(X, a - X) \le u) = \mathbb{P}(a - u \le X \le u) = \frac{(2u - a)}{a}.$$
   Ainsi $F_U$ est affine sur $\left[\dfrac{a}{2}, a\right]$, d'où une densité
   $$f_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u) = \frac{2}{a} \quad \text{pour } u \in ]\tfrac{a}{2}, a[,$$
   et 0 ailleurs. Donc
   $$\boxed{U \sim \mathcal{U}\left(\left[\tfrac{a}{2}, a\right]\right)}, \qquad \boxed{\mathbb{E}(U) = \frac{3a}{4}}, \qquad \boxed{\mathrm{Var}(U) = \frac{a^2}{48}}.$$

3. **Somme $U + V$, loi, espérance et variance de $V = \min(X, Y)$.**
   On a toujours
   $$U + V = \max(X, a - X) + \min(X, a - X) = X + (a - X) = a,$$
   donc $\boxed{U + V = a}$ (constante).
   Par symétrie, $V = \dfrac{a}{2} - |X - \dfrac{a}{2}|$, donc $V \in [0, \frac{a}{2}]$. Pour $v \in [0, \frac{a}{2}]$,
   $$\mathbb{P}(V \le v) = 1 - \mathbb{P}(V > v) = 1 - \mathbb{P}(v < X < a - v) = 1 - \frac{a - 2v}{a} = \frac{2v}{a},$$
   d'où une densité
   $$f_V(v) = \frac{2}{a} \quad \text{pour } v \in ]0, \tfrac{a}{2}[,$$
   et 0 ailleurs. Ainsi
   $$\boxed{V \sim \mathcal{U}\left(\left[0, \tfrac{a}{2}\right]\right)}, \qquad \boxed{\mathbb{E}(V) = \frac{a}{4}}, \qquad \boxed{\mathrm{Var}(V) = \frac{a^2}{48}}.$$

## Exercice 113

1. **Constante $C$ pour que $f$ soit une densité.** Pour $R > 1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^R \frac{C}{x(x+1)}\,dx = C\int_1^R \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\Big)\,dx = C\big[\ln x - \ln(x+1)\big]_1^R.$$

En faisant tendre $R$ vers $+\infty$, $\ln R - \ln(R+1) \to 0$, d'où $\int f = C\big(0-(0-\ln 2)\big) = C\,\ln 2$. La condition $\int f = 1$ impose

$$\boxed{C = \frac{1}{\ln 2}}.$$

2. **Fonction de répartition $F_X$.** Avec $C = \dfrac{1}{\ln 2}$,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\ln 2}\frac{dt}{t(t+1)} = \frac{\ln(2x/(x+1))}{\ln 2} & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

$$\boxed{F_X(x) = 0 \ (x<1), \quad F_X(x) = \frac{\ln\big(\frac{2x}{x+1}\big)}{\ln 2} \ (x \ge 1).}$$

3. **Loi de $Y = \dfrac{1}{X}$.** Le support de $Y$ est $]0,1]$. Pour $y \in ]0,1]$, avec $x = 1/y$,

$$f_Y(y) = f_X\Big(\frac{1}{y}\Big)\,\Big|\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\Big| = \frac{1}{\ln 2}\,\frac{1}{\frac{1}{y}\big(\frac{1}{y}+1\big)} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{1+y}.$$

Ainsi, pour $y \in [0,1]$,

$$\boxed{F_Y(y) = \frac{\ln(1+y)}{\ln 2}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\ln 2}\,\frac{1}{1+y} \ \text{ sur } ]0,1]\,.}$$

4. **Fonction de répartition de $Z = X - \lfloor X \rfloor$ et comparaison.** On a $Z \in [0,1[$. Pour $z \in [0,1[$,

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \le z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \in [k, k+z]) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+z} \frac{1}{\ln 2}\,\frac{dx}{x(x+1)}.$$

Comme $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)} = \ln x - \ln(x+1)$, on obtient, pour $N \ge 1$,

$$\sum_{k=1}^{N}\big(\ln(k+z) - \ln(k+z+1)\big) - \sum_{k=1}^{N}\big(\ln k - \ln(k+1)\big) = \ln(1+z) - \ln(N+z+1) + \ln(N+1).$$

En faisant tendre $N$ vers $+\infty$, le terme $\ln(N+1) - \ln(N+z+1)$ tend vers 0. Donc

$$F_Z(z) = \frac{1}{\ln 2}\,\ln(1+z), \qquad z \in [0,1[,$$

et, par prolongement,

$$\boxed{F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0, \\ \dfrac{\ln(1+z)}{\ln 2} & \text{si } z \in [0,1[, \\ 1 & \text{si } z \ge 1. \end{cases}}$$

On reconnaît la même loi que pour $Y$ (item 3).

$$\boxed{Y \text{ et } Z \text{ ont la même loi.}}$$

## Exercice 114

1. **$F$ est une fonction de répartition d'une v.a. à densité.** La fonction
$$F(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, croissante, et
$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$
Donc $F$ est une fonction de répartition. Sa dérivée
$$f_X(x)=F'(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2}$$
fournit une densité de $X$. On a bien $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx=F(+\infty)-F(-\infty)=1$.
2. **Comparaison des lois de $X$ et $-X$.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$1-F(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1}{1+e^{x}}=F(-x).$$
Ainsi $F_{-X}(x)=\mathbb{P}(-X\le x)=\mathbb{P}(X\ge -x)=1-F(-x)=F(x)$.
$$\boxed{X \text{ et } -X \text{ ont la même loi (symétrie centrale en 0).}}$$
3. **Image $Y=\dfrac{e^X+1}{e^X-1}$ et loi de $Y$.** On écrit
$$Y=\frac{e^X+1}{e^X-1}=\coth\Big(\frac{X}{2}\Big).$$
Comme coth réalise une bijection décroissante de $]0,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$ et de $]-\infty,0[$ vers $]-\infty,-1[$, on obtient
$$\boxed{Y(\Omega)=]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[}$$
($X=0$ a probabilité nulle, donc la valeur éventuelle de $Y$ en $X=0$ est indifférente pour la loi).
Pour $|y|>1$, on inverse $y=\coth(x/2)$ : $x=2\,\operatorname{arccoth}(y)$ avec
$$\operatorname{arccoth}(y)=\frac12\ln\Big(\frac{y+1}{y-1}\Big),\qquad \frac{dx}{dy}=-\frac{2}{y^2-1}.$$
On a aussi $e^x=\dfrac{y+1}{y-1}$, d'où
$$f_X(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{\frac{y+1}{y-1}}{\Big(1+\frac{y+1}{y-1}\Big)^2}=\frac{y^2-1}{4y^2}.$$
Par changement de variable sur les deux branches,
$$f_Y(y)=f_X\big(x(y)\big)\left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{y^2-1}{4y^2}\cdot\frac{2}{y^2-1}=\frac{1}{2y^2},\qquad |y|>1,$$
et $f_Y(y)=0$ sinon. Cela définit bien une densité, car $\int_{|y|>1}\frac{1}{2y^2}\,dy=1$. Donc
$$\boxed{f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y^2} & \text{si } |y|>1,\\ 0 & \text{si } |y|\le 1.\end{cases}}$$

# Exercice 115

Soient $X \sim \mathscr{U}([0,1])$ et $Y \sim \mathscr{U}([0,2])$ indépendantes, et posons $Z = X + Y$.

1. **Loi de $Z = X + Y$ (convolution).** Pour $z \in \mathbb{R}$,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(z-t)\, dt = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,2]}(z-t) \cdot \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}\, \lambda\big([0,1] \cap [z-2, z]\big),$$

où $\lambda$ désigne la longueur d'intervalle. On obtient, avec support $[0,3]$,

$$\boxed{f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{2} & \text{si } z \in [0,1], \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } z \in [1,2], \\ \dfrac{3-z}{2} & \text{si } z \in [2,3], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

2. **Espérance et variance.** Par linéarité de l'espérance et indépendance :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{3}{2}},$$

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{12} + \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{12}}.$$

# Exercice 116

**Données.** Soient $X$ et $Y$ indépendantes, $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, avec densité $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \in [0, +\infty[$.

1. **Densité de $-X$ puis de $X - Y$ par convolution.**

<u>Densité de $-X$.</u> Pour $t < 0$,

$$F_{-X}(t) = \mathbb{P}(-X \leq t) = \mathbb{P}(X \geq -t) = e^{-\lambda(-t)} = e^{\lambda t},$$

et pour $t \geq 0$, $F_{-X}(t) = 1$. Donc, pour $t \in ]-\infty, 0[$,

$$f_{-X}(t) = F'_{-X}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \qquad f_{-X}(t) = 0 \text{ sinon.}$$

$$\boxed{f_{-X}(t) = \lambda e^{\lambda t}\, \mathbf{1}_{]-\infty,\,0]}(t)\,.}$$

<u>Convolution pour $X - Y = X + (-Y)$.</u> Comme $-Y$ a la même densité que $-X$, on a

$$f_{X-Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_{-Y}(z-t)\, dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left[\lambda e^{\lambda(z-t)}\, \mathbf{1}_{]-\infty,\,0]}(z-t)\right] dt.$$

La condition $z - t \leq 0$ équivaut à $t \geq z$.

— Si $z \leq 0$, la borne inférieure devient 0 (puisque $z \leq 0$), d'où

$$f_{X-Y}(z) = \lambda^2 e^{\lambda z} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t}\, dt = \frac{\lambda}{2}\, e^{\lambda z}.$$

— Si $z \geq 0$, la borne inférieure est $t = z$, d'où

$$f_{X-Y}(z) = \lambda^2 e^{\lambda z} \int_z^{+\infty} e^{-2\lambda t}\, dt = \frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda z}.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbf{R}$,

$$\boxed{f_{X-Y}(z) = \frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda|z|} \quad (z \in \mathbf{R})\,.}$$

(C'est la densité de la loi de Laplace centrée de paramètre $\lambda$.)

2. $Z = |X - Y|$ **suit une exponentielle.**
   La loi de $X - Y$ est symétrique, donc pour $z > 0$,

$$f_Z(z) = f_{|X-Y|}(z) = f_{X-Y}(z) + f_{X-Y}(-z) = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda z} = \lambda e^{-\lambda z},$$

   et $f_Z(z) = 0$ pour $z < 0$. Donc

$$\boxed{Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda)\,.}$$

   (En particulier, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathrm{Var}(Z) = \frac{1}{\lambda^2}$.)