TD 14 : applications linéaires, diagonalisation

Exercice 117

On travaille dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbf{R}^4$.

1. **Matrice de f dans la base canonique.**
   Les colonnes de la matrice sont les coordonnées des images des vecteurs de base :

$$f(e_1) = e_2 - e_3, \quad f(e_2) = -2e_2 + 2e_3, \quad f(e_3) = e_1 + e_4, \quad f(e_4) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4.$$

   Ainsi

$$A = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **$\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.**
   Image. Les colonnes de A sont

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2C_1, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_3 + C_1.$$

   Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(C_1, C_3) = \operatorname{Vect}(e_2 - e_3,\ e_1 + e_4)$ et $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$.

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(e_2 - e_3,\ e_1 + e_4\big), \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 2}.$$

   Noyau. Résolvons $AX = 0$ avec $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$. Le système associé vaut

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

   les deux équations du milieu étant équivalentes. Posons $x_2 = s$ et $x_4 = t$. Alors

$$x_1 = 2s - t, \qquad x_3 = -t,$$

   et

$$X = s\,(2, 1, 0, 0)^\top + t\,(-1, 0, -1, 1)^\top.$$

   Ainsi $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((2, 1, 0, 0),\ (-1, 0, -1, 1)\big)$ et $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((2, 1, 0, 0),\ (-1, 0, -1, 1)\big), \quad \dim(\operatorname{Ker} f) = 2}.$$

   (On vérifie bien le théorème du rang : $\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = 2 + 2 = 4$.)

Exercice 118

1. **Linéarité.** Chaque coordonnée de $f_m(x,y,z)$ est une forme linéaire en (x,y,z) :

   $t = 1\cdot x + (m-1)\cdot y + 0\cdot z, \quad u = 2x - 2y + 2mz, \quad v = 0\cdot x + 1\cdot y - 4\cdot z, \quad w = 0\cdot x + 0\cdot y + 2m\cdot z.$

   Donc $f_m(\alpha X + \beta Y) = \alpha f_m(X) + \beta f_m(Y)$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $X, Y \in \mathbf{R}^3$.

   $$\boxed{f_m \text{ est linéaire.}}$$

2. **Matrice dans les bases canoniques.** Les colonnes sont $f_m(e_1), f_m(e_2), f_m(e_3)$:

   $$f_m(e_1) = (1,2,0,0), \quad f_m(e_2) = (m-1,-2,1,0), \quad f_m(e_3) = (0,2m,-4,2m).$$

   $$\boxed{A_m = \begin{pmatrix} 1 & m-1 & 0 \\ 2 & -2 & 2m \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}.}$$

3. **Noyau et image selon m.** On résout $A_m\,(x,y,z)^\top = 0$, soit

   $$\begin{cases} x + (m-1)y = 0, \\ 2x - 2y + 2mz = 0, \\ y - 4z = 0, \\ 2mz = 0. \end{cases}$$

   Cas $m \neq 0$. De $2mz = 0$ on tire $z = 0$, puis $y = 0$ et $x = 0$.

   $$\boxed{\operatorname{Ker} f_m = \{(0,0,0)\}, \ \dim \operatorname{Ker} f_m = 0.}$$

   Les colonnes $C_1 = (1,2,0,0)$, $C_2 = (m-1,-2,1,0)$ sont indépendantes, et $C_3 = (0,2m,-4,2m)$ n'est combinaison de C_1, C_2 que si $m = 0$ (impossible ici), d'où le rang 3.

   $$\boxed{\operatorname{Im} f_m = \operatorname{Vect}\big(C_1, C_2, C_3\big), \ \dim \operatorname{Im} f_m = 3.}$$

   Cas $m = 0$. Le système devient

   $$\begin{cases} x - y = 0, \\ 2x - 2y = 0, \\ y - 4z = 0, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

   d'où $y = 4z$ et $x = 4z$. On paramètre par $z \in \mathbf{R}$:

   $$\boxed{\operatorname{Ker} f_0 = \{(4z,4z,z) \mid z \in \mathbf{R}\} = \operatorname{Vect}(4,4,1), \ \dim \operatorname{Ker} f_0 = 1.}$$

   Ici $C_1 = (1,2,0,0)$, $C_2 = (-1,-2,1,0)$, et $C_3 = (0,0,-4,0) = -4C_1 - 4C_2$, donc

   $$\boxed{\operatorname{Im} f_0 = \operatorname{Vect}\big((1,2,0,0),\ (-1,-2,1,0)\big), \ \dim \operatorname{Im} f_0 = 2.}$$

4. **Injectivité, surjectivité, isomorphie.**

   $$\boxed{f_m \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} f_m = \{0\} \iff m \neq 0.}$$

   Comme $f_m : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ a rang ≤ 3, il n'est jamais surjectif sur $\mathbf{R}^4$ (quel que soit m).

   $$\boxed{f_m \text{ n'est surjective pour aucune valeur de } m.}$$

   En particulier, entre espaces de dimensions différentes, f_m n'est jamais un isomorphisme.

   $$\boxed{f_m \text{ n'est isomorphisme pour aucune valeur de } m.}$$

Exercice 119

1. **Endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$.** Pour $P \in \mathbf{R}_3[X]$, on a $P' \in \mathbf{R}_2[X]$, donc $(X+1)P' \in \mathbf{R}_3[X]$ et $f(P) = P - (X+1)P' \in \mathbf{R}_3[X]$ (stabilité). La dérivation et les opérations polynomiales étant linéaires, pour $P, Q \in \mathbf{R}_3[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$$f(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q) - (X+1)(\alpha P' + \beta Q') = \alpha f(P) + \beta f(Q).$$

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{R}_3[X].}$$

2. **Noyau de f.** $f(P) = 0 \iff P = (X+1)P'$. Alors

$$\left(\frac{P}{X+1}\right)' = \frac{(X+1)P' - P}{(X+1)^2} = 0,$$

donc $\dfrac{P}{X+1}$ est constante : il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $P = c(X+1)$. Ainsi

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X+1), \quad \dim \operatorname{Ker} f = 1.}$$

3. **Image de f.** Sur la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$,

$$\begin{aligned}
&f(1) = 1, \\
&f(X) = X - (X+1) \cdot 1 = -1, \\
&f(X^2) = X^2 - (X+1) \cdot 2X = -X^2 - 2X, \\
&f(X^3) = X^3 - (X+1) \cdot 3X^2 = -2X^3 - 3X^2.
\end{aligned}$$

Un système générateur de $\operatorname{Im} f$ est donc $\{1,\ -X^2 - 2X,\ -2X^3 - 3X^2\}$, qui est libre (les coefficients des puissances $1, X, X^2, X^3$ s'annulent uniquement pour la combinaison triviale). Par le théorème du rang (ou par cette base explicite),

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(1,\ -X^2 - 2X,\ -2X^3 - 3X^2\big), \quad \dim(\operatorname{Im}(f)) = 3.}$$

4. **Bilan.**

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X+1) \text{ (droite vectorielle)}, \quad \operatorname{Im} f \text{ est un sous-espace de } \mathbf{R}_3[X] \text{ de dimension } 3.}$$

Exercice 120

On travaille dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi : \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), \quad \varphi(M) = AM - MA.$$

1. **Linéarité.** Pour $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$,

$$\varphi(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)A = \alpha(AM - MA) + \beta(AN - NA) = \alpha\varphi(M) + \beta\varphi(N).$$

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{M}_2(\mathbf{R}).}$$

2. **Matrice de φ dans la base canonique.** Dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$,

$$\begin{aligned}
\varphi(E_{11}) &= AE_{11} - E_{11}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{21}, \\
\varphi(E_{12}) &= AE_{12} - E_{12}A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_{11} + E_{22}, \\
\varphi(E_{21}) &= 0, \\
\varphi(E_{22}) &= AE_{22} - E_{22}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{21}.
\end{aligned}$$

La matrice (les colonnes sont les coordonnées des images) est

$$\boxed{[\varphi]_{(E_{ij})} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

3. $\operatorname{Ker}\varphi$ **et** $\operatorname{Im}\varphi$**.** Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\varphi(M) = AM - MA = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\varphi(M) = 0$ si et seulement si $b = 0$ et $a = d$. On obtient

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} : \ a, c \in \mathbf{R} \right\} = \operatorname{Vect}(I_2,\ E_{21}), \quad \dim \operatorname{Ker}\varphi = 2.}$$

L'image est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} -b & 0 \\ t & b \end{pmatrix}$ avec $b, t \in \mathbf{R}$, donc

$$\boxed{\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(-E_{11} + E_{22},\ E_{21}), \quad \dim \operatorname{Im}\varphi = 2.}$$

En particulier, φ n'est ni injective (noyau non nul) ni surjective (rang $= 2 < 4$).

4. **Puissances** φ^2 **et** φ^3**.** D'après $\varphi(M) = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{pmatrix}$, en réappliquant φ,

$$\varphi^2(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2b & 0 \end{pmatrix} = -2b\, E_{21}, \qquad \varphi^3(M) = 0_2.$$

Donc

$$\boxed{\varphi^3 = 0 \ \text{ (nilpotent d'ordre 3)}, \quad \varphi^2 \neq 0 \text{ et } \operatorname{Im}\varphi^2 = \operatorname{Vect}(E_{21}).}$$

Exercice 121

1. **Endomorphisme de** $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R})$**.** Pour tout $f \in E$, on a $f' \in E$ (stabilité). La dérivation est linéaire :

$$D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha D(f) + \beta D(g).$$

$$\boxed{D \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

Son noyau est l'ensemble des fonctions de dérivée nulle, donc les fonctions constantes :

$$\boxed{\operatorname{Ker} D = \{x \mapsto c \mid c \in \mathbf{R}\} \neq \{0\} \text{ donc } D \text{ n'est pas injectif.}}$$

Pour tout $g \in E$, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x g(t)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et vérifie $F' = g$.

$$\boxed{D \text{ est surjectif sur } E.}$$

2. On considère
$$F = \{\, x \mapsto (ax+b)\,e^{x} + (cx+d)\,e^{2x} \;\big|\; (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 \}.$$

   (a) **F est un sous-espace vectoriel, base et dimension.** F est stable par combinaison linéaire. Une base naturelle est
$$\mathscr{B} = (x \mapsto e^{x},\ x \mapsto xe^{x},\ x \mapsto e^{2x},\ x \mapsto xe^{2x}), \qquad \boxed{\dim F = 4.}$$
   Démonstration de la liberté : si $\alpha e^{x} + \beta xe^{x} + \gamma e^{2x} + \delta xe^{2x} = 0$ pour tout x, alors $e^{x}(\alpha + \beta x) = -e^{2x}(\gamma + \delta x)$. En divisant par e^{x}, et le membre de droite est e^{x} multiplié par un polynôme affine ; l'égalité pour tout x impose $\gamma = \delta = 0$, puis $\alpha = \beta = 0$.

   (b) **La restriction D_F est un endomorphisme de F.** Pour $f(x) = (ax+b)e^{x} + (cx+d)e^{2x}$,
$$f'(x) = \big(a + (ax+b)\big)e^{x} + \big(c + 2(cx+d)\big)e^{2x} = \big((b+a) + ax\big)e^{x} + \big((2d+c) + 2cx\big)e^{2x} \in F.$$
   Donc $D_F : f \mapsto f'$ est linéaire et F-stable.
$$\boxed{D_F \text{ est un endomorphisme de } F.}$$

   (c) **Matrice de D_F dans $\mathscr{B}$.** On a
$$\begin{aligned} D_F(e^{x}) &= e^{x}, & D_F(xe^{x}) &= e^{x} + xe^{x},\\ D_F(e^{2x}) &= 2e^{2x}, & D_F(xe^{2x}) &= e^{2x} + 2xe^{2x}. \end{aligned}$$
   Ainsi, dans $\mathscr{B} = (e^{x}, xe^{x}, e^{2x}, xe^{2x})$,
$$\boxed{[D_F]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

   (d) **Injectivité et surjectivité de D_F.** De la matrice triangulaire supérieure ci-dessus, les valeurs diagonales $1, 1, 2, 2$ sont non nulles ; on peut aussi résoudre explicitement
$$D_F(f) = 0 \iff \begin{cases} b + a = 0,\\ a = 0,\\ 2d + c = 0,\\ 2c = 0, \end{cases} \iff a = b = c = d = 0.$$
   Donc $\operatorname{Ker} D_F = \{0\}$ et, comme $\dim F = 4$, on a $\dim \operatorname{Im} D_F = 4$.
$$\boxed{D_F \text{ est injectif et surjectif sur } F \text{ (donc bijectif).}}$$

Exercice 122

On considère
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f : \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbf{R}), \quad f(M) = AM.$$

1. **Endomorphisme.** Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$,
$$f(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N) = \alpha AM + \beta AN = \alpha f(M) + \beta f(N).$$
   De plus, $AM \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ pour tout M. $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{M}_2(\mathbf{R}).}$

2. **Diagonalisabilité de f.**
On commence par déterminer les valeurs propres de A en résolvant $(A - \lambda I_2)u = 0$ avec λ paramètre :
$$(A - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0, \\ x + (-1-\lambda)y = 0. \end{cases}$$
De la première équation, $y = (\lambda - 1)x$. En reportant dans la seconde :
$$x + (-1-\lambda)(\lambda-1)x = 0 \iff 1 + (-1-\lambda)(\lambda-1) = 0 \iff 2 - \lambda^2 = 0.$$
Ainsi $\boxed{\lambda = \pm\sqrt{2}}$. Des vecteurs propres associés (par exemple) sont
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - \sqrt{2}\, I_2), \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A + \sqrt{2}\, I_2).$$
Construisons maintenant des vecteurs propres de f dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Si $u \in \mathbf{R}^2$ vérifie $Au = \lambda u$, alors
$$f\begin{pmatrix} u & 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u & 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u & 0 \end{pmatrix},$$
et de même $f\begin{pmatrix} 0 & u \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 & u \end{pmatrix}$. En particulier, en prenant u_1, u_2 ci-dessus, on obtient quatre matrices eigenvecteurs de f :
$$M_1 = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & u_1 \end{pmatrix} \text{ (valeur propre } \sqrt{2}),$$
$$M_3 = \begin{pmatrix} u_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & u_2 \end{pmatrix} \text{ (valeur propre } -\sqrt{2}).$$
Ces quatre matrices sont linéairement indépendantes (les colonnes non nulles n'occupent pas les mêmes positions et u_1, u_2 sont indépendants). Elles forment donc une base de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de f.
$$\boxed{f \text{ est diagonalisable, avec valeurs propres } \sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{2} \text{ (chacune de multiplicité 2).}}$$

Exercice 123

1. **Endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.** Pour $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,
$$g(\alpha P + \beta Q) = (X-1)(\alpha P' + \beta Q') - (\alpha P + \beta Q) = \alpha g(P) + \beta g(Q).$$
La dérivation envoie $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, puis la multiplication par $X - 1$ remonte dans $\mathbf{R}_n[X]$. Ainsi $g(\mathbf{R}_n[X]) \subset \mathbf{R}_n[X]$ et g est linéaire.
$$\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$$

2. **Polynômes $P_k = (X-1)^k$ et diagonalisabilité.**
   (a) On a $P_k' = k(X-1)^{k-1}$. Donc
$$g(P_k) = (X-1)\, P_k' - P_k = (X-1)\, k(X-1)^{k-1} - (X-1)^k = (k-1)\,(X-1)^k.$$
$$\boxed{g(P_k) = (k-1)\, P_k \quad \text{pour tout } k \in [\![0, n]\!].}$$
   (b) La famille $\big(P_0, \ldots, P_n\big) = \big(1, (X-1), \ldots, (X-1)^n\big)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$. Chaque P_k est vecteur propre de g pour la valeur propre $(k-1)$, qui sont toutes deux à deux distinctes. Ainsi $\mathbf{R}_n[X]$ admet une base de vecteurs propres de g.
$$\boxed{g \text{ est diagonalisable dans la base } \big(1, (X-1), \ldots, (X-1)^n\big), \ \mathrm{Sp}(g) = \{-1, 0, 1, \ldots, n-1\}.}$$

3. **Automorphisme ?** Pour $n \geq 1$, $g(P_1) = g(X-1) = 0$, donc $(X-1) \in \mathrm{Ker}\, g$ et g n'est pas injectif ni bijectif. Pour $n = 0$, l'espace est $\mathrm{Vect}(1)$ et $g(1) = -1 \cdot 1$, donc g est un isomorphisme.
$$\boxed{g \text{ est un automorphisme si et seulement si } n = 0; \ \text{pour } n \geq 1, \ \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Vect}(X-1).}$$

Exercice 124

1. **Endomorphisme de $E = \mathbf{K}_n[X]$.** Pour tout $P \in E$, on a $P'' \in \mathbf{K}_{n-2}[X]$ (par convention $\mathbf{K}_m[X] = \{0\}$ si $m < 0$). Alors $(X^2-1)P'' \in \mathbf{K}_n[X]$, donc $u(E) \subset E$. La dérivation et la multiplication par un polynôme étant linéaires,

$$u(\alpha P + \beta Q) = (X^2-1)(\alpha P'' + \beta Q'') = \alpha u(P) + \beta u(Q).$$

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{K}_n[X].}$$

2. **Diagonalisabilité de u.**
Si $n \leq 1$, u est l'endomorphisme nul qui est $\boxed{\text{diagonalisable}}$.
Sinon, $n \geq 2$:
Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on calcule

$$u(X^k) = (X^2-1)\left(k(k-1)X^{k-2}\right) = k(k-1)\,X^k \;-\; k(k-1)\,X^{k-2}.$$

De plus, $u(1) = u(X) = 0$.
Dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$, la matrice de u est triangulaire supérieure, de diagonale

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6,\ \lambda_4 = 12,\ \ldots,\ \lambda_n = n(n-1).$$

Ainsi les valeurs propres sont

$$\boxed{\mathrm{Sp}(u) \subset \{0, 2, 6, 12, \ldots, n(n-1), \ldots\}}$$

Toutes les valeurs propres non nulles sont associées à des sous-espaces propres au moins de dimension 1, et 0 a pour sous espace propre associé $\mathbf{K}_1[X]$, de dimension 2, donc la somme des sous-espaces propres est plus grande ou égale à la dimension de E, ce qui prouve que u est $\boxed{\text{diagonalisable}}$.

Exercice 125

On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ et l'application

$$T : E \longrightarrow E, \qquad (T(f))(x) = \int_0^x t\,f(t)\,dt.$$

1. **Dérivabilité de $T(f)$.** La fonction $t \mapsto t\,f(t)$ est continue sur $\mathbf{R}$ si $f \in E$. Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$(T(f))'(x) = x\,f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

$$\boxed{(T(f))'(x) = x\,f(x) \text{ et } T(f) \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}) \subset E}.$$

2. **T est un endomorphisme de E et T est injectif.** Pour $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $f, g \in E$,

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = \int_0^x t\,[\alpha f(t) + \beta g(t)]\,dt = \alpha T(f)(x) + \beta T(g)(x),$$

et l'item 1 assure $T(f) \in E$. Donc T est linéaire et stable sur E :

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E}.$$

Si $T(f) = 0$, alors $(T(f))'(x) = 0$ pour tout x. Par l'item 1, cela donne $x\,f(x) = 0$ pour tout x. Ainsi $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$, puis par continuité $f(0) = 0$. Donc $f \equiv 0$ et

$$\boxed{T \text{ est injectif}}.$$

3. (a) **Non-surjectivité.** Pour tout $f \in E$, on a $(T(f))'(x) = x\, f(x)$, d'où $(T(f))'(0) = 0$. Ainsi toute fonction de l'image de T est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie $g'(0) = 0$. La fonction $h : x \mapsto x$ appartient à E mais $h'(0) = 1$, donc $h \notin \operatorname{Im} T$.

$$\boxed{T \text{ n'est pas surjectif sur } E}.$$

(b) **Dimension de E.** Un endomorphisme injectif est aussi bijectif lorsqu'il opère sur un espace de dimension finie donc E n'est pas de dimension finie.

$$\boxed{E \text{ est de dimension infinie}}.$$