CH11 – Variables aléatoires discrètes

Plan du chapitre

Théorie des probas : modélise des expériences aléatoires $\longrightarrow$ mesurer qqch sur l'obs

Réel : Expérience $\longrightarrow$ observation $\longrightarrow$ $X(\omega) \in \mathbb{R}$

variable aléatoire

Maths $\Omega \longrightarrow \omega \in \Omega$

Liste des définitions

Liste des techniques de base

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. **T_0** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

1 Variable aléatoire discrète

A) Notions de base

■ Remarque 1.
Les variables aléatoires finies (1ère année) sont un cas particulier de variables aléatoires discrètes. cf exple 1.1.

■ Définition 1 .... [V.A.R. discrète]
Toute variable aléatoire X telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

■ Remarque 2.
On peut donc indexer les éléments de $X(\Omega)$ sur un ensemble d'entiers :
$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad n \in I\}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$.

Ces points n'existent pas si $X(\Omega)$ est fini.

■ Exemple 1.

1. Les VAR définies sur un EPF sont des VAR discrètes (*cf.* Cours de première année.)
2. Si X est la VAR définie pour $k \in \mathbf{N}^\star$ par : $P\left(X = \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{6}{\pi^2 k^2}$, X est une VAR discrète (ici $x_n = 1/n$, et $n \in I = \mathbf{N}^\star$).
3. Les variables à densité **ne sont pas** des VAR discrètes.

■ Théorème 1 .... [S.Q.C.E *associé à une V.A.R. discrète*]
Si X est une VAR discrète et $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in I}$,[a] alors les évènements $[X = x_n]$ pour n décrivant I forment un SQCE appelé système quasi-complet d'évènements associé à X.

a. Souvent $I = \mathbf{N}$, ou $I = \mathbf{N}^\star$ ou encore $I = \mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, et $x_n = n$.

■ Définition 2 .... [Loi d'une var discrète]
Si X est une VAR discrète d'espace image $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in I}$, la fonction définie sur $X(\Omega)$ par $p(x_k) = P(X = x_k)$ est une fonction de masse induisant une mesure de probabilité sur $X(\Omega)$ appelée loi de la variable X.

■ Exemple 2.
À quelle condition sur α on définit une variable aléatoire X sur $\Omega = \mathbf{N}^\star$ en posant $P(X = k) = \dfrac{\alpha}{k(k+1)}$ pour $k \in \mathbf{N}^\star$?

2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

■ Remarque 3.
Les propriétés universelles des fonctions de répartition sont vérifiées À savoir : positivité, croissance, limites en $\pm\infty$.

CH9 déf 21

A) Propriétés

■ Proposition 1 .... [Propriétés des fonctions de répartition de VAR discrètes]
Notons $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in I}$. Pour tout réel t :

1. $F_X(t) = \displaystyle\sum_{\substack{n \in I \\ x_n \leq t}} P(X = x_n)$.
2. En particulier, si $X(\Omega) = \mathbf{N}$:
   a) $F_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} P(X = k)$.
   b) Pour $k > 0$:
   $P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$.

Illustration du thm 1.

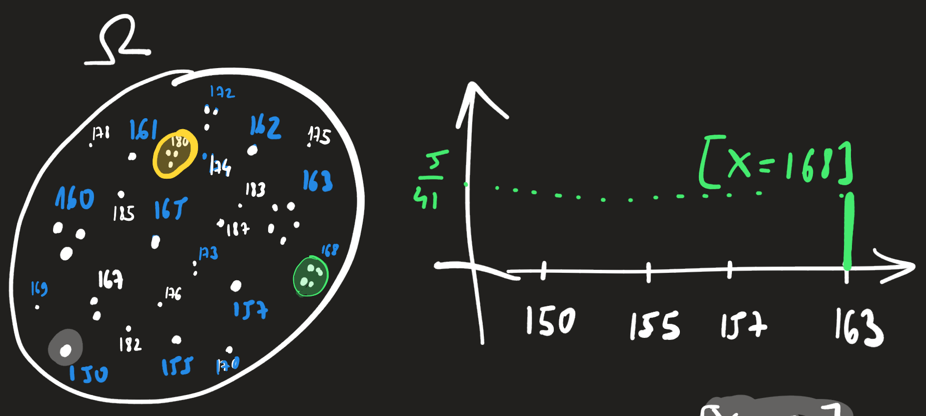
Expérience : on prend un élève au hasard dans la deubs.
Ω

Mesure : je mesure sa taille.
VAR

$$\Omega = \{ \text{élèves de la classe} \}$$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega) = \text{Taille de } \omega \text{ en cm.}$$

c'est une VAR.



$[X=150]$

$[X=180]$

$X(\Omega) = \{150, 151, \cdots, 187\}$

Les événements $[X=x]$ où $x \in X(\Omega)$

sont 2 à 2 incompatibles

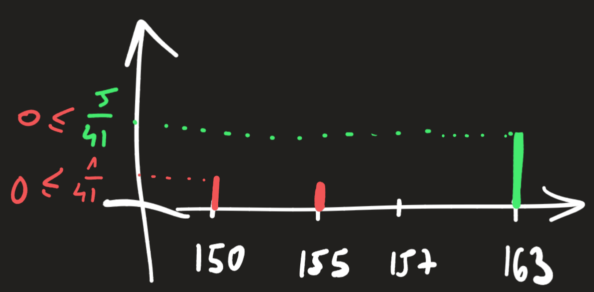
et $\bigcup_{x \in \Omega} [X=x] = \Omega$.

c'est un S.C.E.

Loi de X ?

Comme je tire un deubs au hasard, Ω est équiprobabilisé.

$$P(X=163) = \frac{5}{41} = \frac{\# [X=163]}{\# \Omega}$$



La somme des poids ainsi attribués fait 1.

D'après CNS thm 1 on a défini une distribution de masse sur $X(\Omega)$ donc :

$X(\Omega)$ est lui-même probabilisé.

La mesure ainsi définie sur $X(\Omega)$ s'appelle la loi de X

Exemple 2

X est VAR de loi donnée par la fonction

$k \mapsto P(X=k)$ ssi cette dernière est

une fonction de masse sur $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

Vérif : il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} ① \ \forall k \in \mathbb{N}^* \quad u_k = \dfrac{\alpha}{k(k+1)} \geq 0 \\ ② \ \text{La série de t.g } u_k \text{ converge vers } 1 \end{cases}$$

① $\iff \alpha \geq 0$

② $\iff \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ existe et vaut 1

$\iff \quad S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 + o(1) \quad n \to \infty$

Calcul de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha}{k(k+1)}$

On remarque que $\quad (k+1) - k = 1 \quad \forall k \geq 1$

donc en divisant par $k(k+1) \neq 0$ car $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

Finalement $\quad S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha}{k} - \dfrac{\alpha}{k+1} = \dfrac{\alpha}{1} - \dfrac{\alpha}{n+1}$

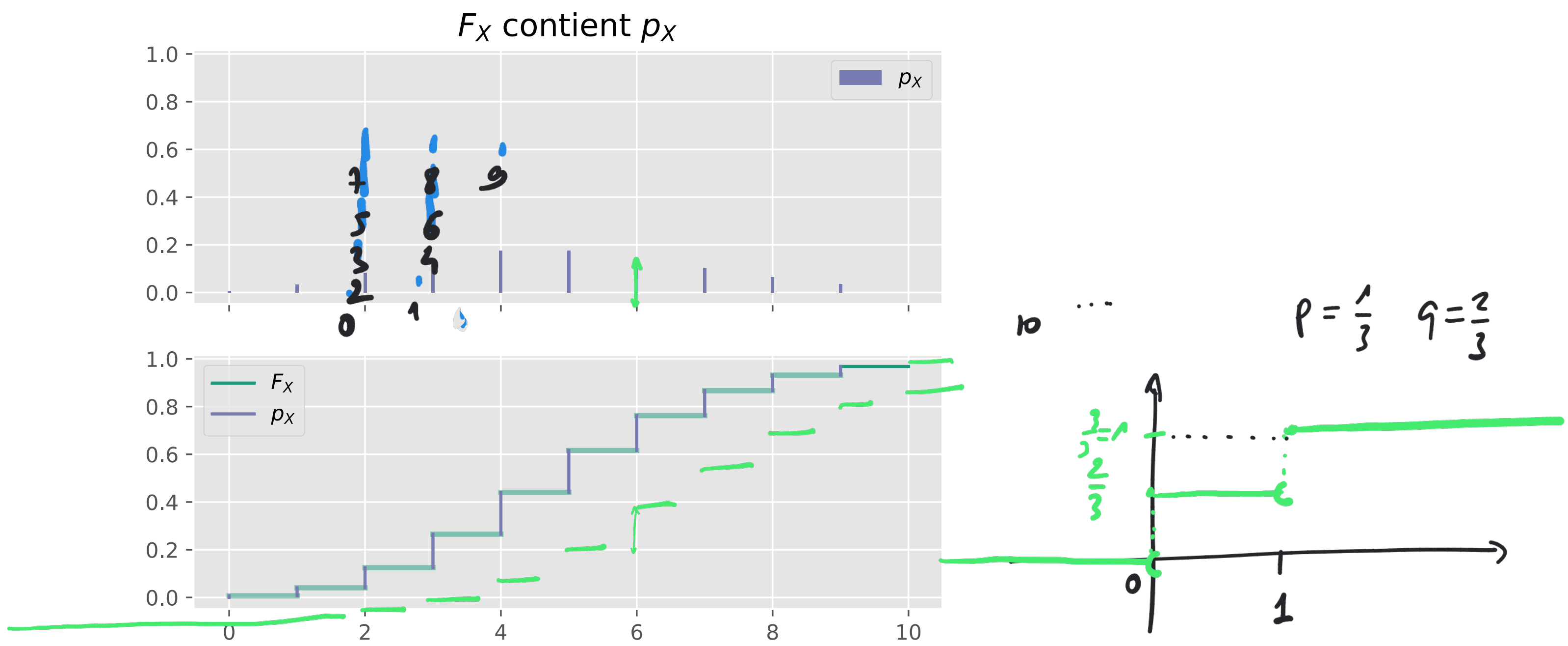
$$S_n = \alpha + o(1) \quad n \to +\infty$$

donc : ① et ② $\iff \boxed{\alpha = 1}$

■ Remarque 4.
De façon générale, si on peut ordonner en une suite strictement croissante les éléments de $X(\Omega) = x_1 < x_2 < \cdots < x_n \ldots$, il est vrai que $P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$ en convenant que $F(x_0) = 0$.

B) Obtention de la loi par la fonction de répartition

■ Théorème 2 ....utile..............[*La fonction de répartition contient la loi*]
La loi de X est déterminée par F_X. En particulier, deux variables ont même fonction de répartition ssi elles ont même loi.



L'amplitude de la discontinuité de F_X au point x_k vaut $P(X = x_k)$.

T₁ Quand calculer F_Y pour obtenir la loi de Y ?

1. Typiquement pour calculer loi d'un maximum, c'est-à-dire, si $Y = \max(X_1, X_2)$. En effet, on part de :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad [\max(X_1, X_2) \leq t] = [X_1 \leq t] \cap [X_2 \leq t].$$

   Ce qui permet de calculer $F_Y(t)$ en passant aux probas. Souvent X_1, X_2 sont indépendantes, ce qui permet de simplifier le calcul..
2. Ensuite on obtient la loi de X par **prop. 2**
3. Dans le cas d'un mininum, on utilise plutôt la *fonction de survie* $S_Y : t \mapsto P(Y > t) = 1 - F_Y(t)$, et on part de :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad [\min(X_1, X_2) > t] = [X_1 > t] \cap [X_2 > t].$$

4. Le raisonnement et le calcul sont identiques pour un maximum (ou minimum) d'un nombre fini n de variables aléatoires, puisque si $t \in \mathbf{R}$:

$$[\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq t] = [X_1 \leq t] \cap [X_2 \leq t] \cap \cdots \cap [X_n \leq t].$$

.

Exemple illustrant T_1

On lance deux dés fous*. On note X la VAR égale au plus grand score des deux dés. Loi de X ?

* dé fou : infinité de faces numérotés $0, 1, 2, \dots$
probabilité que le dé fasse k $= \frac{1}{2^{k+1}}$

Solution : Notons D_j la VAR égale au score du $j^{ème}$ dé fou (je peux supposer les dés distinguables) ($j \in \{1, 2\}$).

Alors $X = \max(D_1, D_2)$

On calcule la fonction de rep de X, notée F_X

- Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, il suffit de calculer $F_X(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- Par déf. $F_X(k) = P(X \leq k)$.
  → je dois calculer une proba : $\boxed{T_7 \text{ CH9}}$

$$[X \leq k] = [\max(D_1, D_2) \leq k]$$
$$\overset{T_1}{=} [D_1 \leq k] \cap [D_2 \leq k] \quad \text{par déf de max}$$

Ensuite je passe aux probas :

$$P(X \leq k) = P(D_1 \leq k \cap D_2 \leq k)$$

on suppose les dés indépendants donc D_1 et D_2 sont des VAR indépendantes.

$$P(X \leq k) = P(D_1 \leq k) \times P(D_2 \leq k)$$
$$= F_{D_1}(k) \times F_{D_2}(k) \quad \text{par déf de F. de rep}$$
$$\overset{\text{thm 2.}}{=} F_{D_1}^2(k)$$

Calculons alors $F_{D_1}(k)$:

$$[D_1 \leq k] \underset{T_1 \text{ CH9}}{=} \bigcup_{j=0}^{k} [D_1 = j]$$

P

$$F_{D_1}(k) \underset{T_7 \text{ CH9}}{=} P\left(\bigcup_{j=0}^{k} [D_1 = j]\right)$$

Comme $([D_i = j])_{j \geq 1}$ est un S.Q.C.E (thm 1)

par additivité finie :

$$F_{D_1}(k) = \sum_{j=0}^{k} P(D_1 = j)$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2^{j+1}} \quad \text{d'après la loi du dé fou}$$

$$\forall k \geq 0 \quad \boxed{F_{D_1}(k) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{\cancel{1 - \frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}}$$

D'où : $\forall k \in \mathbb{N} \quad F_X(k) = \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)^2 \quad (*)$

. Obtention de la loi de X :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) \overset{\text{Prop.}}{=} F_X(k) - F_X(k-1)$$

Comme $F_X(-1) = 0$ (car les faces des dés sont à partir de 0), on voit que $(*)$ est vraie aussi pour $k = -1$.

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = \Big(\underbrace{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}_{a}\Big)^2 - \Big(\underbrace{1 - \frac{1}{2^k}}_{b}\Big)^2$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}}_{a-b} \times \underbrace{\left(2 - \frac{3}{2^{k+1}}\right)}_{a+b}}$$

$$a = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \qquad \alpha = \frac{1}{2^k}$$
$$b = 1 - \frac{1}{2^k}$$

$$a = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad a - b = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$
$$b = 1 - \alpha$$
$$a + b = 2 - \frac{3\alpha}{2}$$

T_2 Comment calculer la loi d'une VAR Y donnée ?

1. Essayer de reconnaître une loi usuelle (cf.**T4**, par exemple).
2. On peut essayer de relier Y à une VAR X qui suit une loi usuelle. Il faut alors être soigneux sur la détermination de l'espace image de Y en fonction de celui de X.

3a. Déterminer l'espace image $Y(\Omega)$

— On justifie que les valeurs extrêmes de Y sont observables (c'est assez facile).

— On ajoute que les cas intermédiaires sont possibles.

3b. On calcule $P(Y=k)$ pour $k \in Y(\Omega)$ avec **T7**. **CH9**

4. Sinon : 4

3 Lois usuelles de première année

A) Rappels terminologiques

■ Définition 3 .... [Épreuve de Bernoulli - succès - paramètre de succès]
Expérience aléatoire à l'issue de laquelle il n'y a que **deux** observations possibles. L'une de ces observations (privilégiée dans le contexte de l'expérience) s'appelle succès. La probabilité d'observer le succès s'appelle paramètre de succès de l'épreuve.

4

3. On peut calculer F_Y, utiliser T

■ Définition 4 .... [Schéma de Bernoulli - paramètres du schéma]
Répétitions (finies ou infinies) *mutuellement indépendantes* d'une même épreuve de Bernoulli p. Si les répétitions sont en nombre fini N, le couple (N,p) s'appelle paramètres du schéma.

B) Lois usuelles de première année

Données. Une urne U contient $n \geq 1$ boules numérotées de 1 à n est indistingables au toucher, et une proportion p de ces boules est blanche, et on pose $q = 1-p$.

Expérience	**Mesure**	**Loi de** X	$X(\Omega) =$	$P(X=k) =$ $(k \in \Omega)$	$E(X)$	$V(X)$
1. On tire λ boules au hasard successivement avec remise	X compte le nombre de boules tirées	$X \rightsquigarrow \mathscr{C}(\lambda)$	$\{\lambda\}$	$P(X=\lambda)=1$	λ	0
2. On tire 1 une boule au hasard	X vaut 0 si la couleur observée est noire, 1 sinon	$X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$	$\{0,1\}$	$P(X=0)=p$ $P(X=1)=q$	p	pq
3. On tire 1 boule au hasard	X mesure le numéro de la boule tirée	$X \rightsquigarrow \mathscr{U}(n)$	$\{1\ldots n\}$ et	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
4. On tire successivement avec remise N boules	X mesure le nombre de boules blanches tirées	$X \rightsquigarrow \mathscr{B}(N,p)$	$\{0\ldots N\}$	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{N-k}$	Np	Npq

réel $\rightarrow \Omega$

Ω

Ω ?   Boule : (k, c_k) où $k \in \{1, \dots, n\}$
$c_k \in \{\text{blanc}, \text{noir}\}$

(rem : $U \neq \{1 \dots n\} \times \{\text{blanc}, \text{noir}\}$
mais $U \subset \{1 \dots n\} \times \{\text{blanc}, \text{noir}\}$)

1. $\Omega = \{\text{suites de } \lambda \text{ boules}\}$
$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_\lambda) \quad \underset{1 \leq i \leq \lambda}{x_i \in U}\} = U^\lambda$

2. $\Omega = U$ car ici une observation = une boule

3. $\Omega = U$

4. $\Omega = U^N$

Exemple : On lance une pièce : on observe $\underbrace{\text{sur quelle face elle tombe}}_{\text{2 observations possibles}}$
Pile est considéré comme le succès

Cette expérience est une épreuve de Bernoulli
Son paramètre de succès est la probabilité d'observer pile.

illustre $\boxed{T_2}$2.

4 Loi géométrique sur $\mathbf{N}^\star$

A) Définition

■ **Définition 5** .... [Loi géométrique $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$]

on sait le calculer

On dit que X suit une loi géométrique (sur $\mathbf{N}^\star$) de paramètre $p \in]0,1[$ si :

1. $X(\Omega) \subset \mathbf{N}^\star$.

Comparer avec prop. $\boxed{\ldots}$

2. $\forall k \in \mathbf{N}^\star \; P(X=k) = pq^{k-1}$ (où $q = 1-p$).

Dans ce cas on note $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$

■ **Remarque 5.**

1. La loi géométrique est la loi du nombre d'essais effectués pour obtenir le premier succès lors de répétitions **mutuellement indépendantes** d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.
2. Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$, la variable $Y = X-1$ qui compte donc le nombre d'échecs avant le premier succès. On a donc $Y(\Omega) = \mathbf{N}$ et $P(Y=k) = pq^k$.

B) Fonction de répartition

■ **Proposition 2** .... [Fonction de répartition de la loi $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$]

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$, pour tout réel t :

$$P(X \leq t) = F_X(t) = \left| \begin{array}{ll} 1-q^{\lfloor t \rfloor} & \text{si } t \geq 1 \\ \underbrace{0 \qquad\qquad \text{sinon}}_{\text{ne pas oublier ce cas}} & \end{array} \right.$$

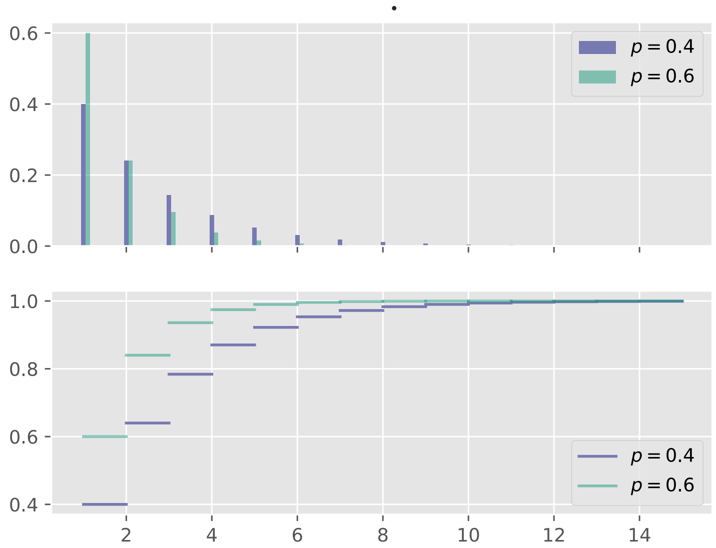
Comparer avec prop4 et rem. 9

en notant $q = 1-p$

C) Graphique

Lois $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$

Fonction de masse



Fonction de répartition

Exercice : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}_{(p)}$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $P(X>t)$

(rem : cela revient à calculer F_X. Preuve prop 2).

puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

. $\forall t \leq 1$: $P(X>t) = 1$: en effet, l'évènement $X>t$ est quasi-certain / presque sûr.

. Soit $t>1$.

T7 CH. $[X>t]$ = "le 1er succès est observé à une date $>t$"

= "jusqu'à la date t, il n'y a eu que des échecs".

- J'introduis pour $k \in \mathbb{N}^*$: E_k = "à la k^e épreuve de Bernoulli associée à l'expérience, on a observé un échec".
- Ceci me permet d'écrire :

$\forall t \geq 1$ $[X>t] = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_t$.

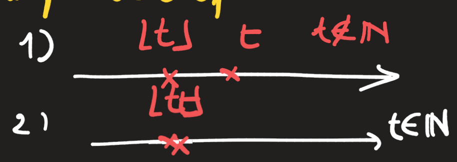
⚠ $t \in \mathbb{R}$: donc F_t n'existe pas toujours

j'aimerais dire : $[X>t] = [X > \lfloor t \rfloor]$

→ je reviens à la déf de la partie entière.

$\lfloor t \rfloor \overset{déf}{=}$ L'unique entier k qui satisfait

$k \leq t < k+1$



♥ $[X \leq t] = [X \leq \lfloor t \rfloor] \cup \underbrace{X \in]\lfloor t \rfloor, t]}_{A}$

Or X prend des valeurs entières donc

- si $t \notin \mathbb{N}$: A est quasi-impossible
- si $t \in \mathbb{N}$: A est carrément impossible

donc $P(X \leq t) \overset{\text{additivité finie}}{=} P(X \leq \lfloor t \rfloor) + P(A)$

d'où $P(X \leq t) = P(X \leq \lfloor t \rfloor) + 0$

$P(X \leq t) = P(X \leq \lfloor t \rfloor)$

donc $\boxed{P(X>t) = P(X > \lfloor t \rfloor)}$

j'ai pu me ramener à t entier !

Comme $X > \lfloor t \rfloor = E_1 \cap \dots \cap E_{\lfloor t \rfloor}$

par mutuelle indépendance des E_k :

$\boxed{\forall t \geq 1 \quad P(X>t) = q^{\lfloor t \rfloor}}$

D) Moments

■ Théorème 3 .... [*Moments de la loi $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$*]
Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$ alors X admet espérance et variance et :

1. $E(X) = \dfrac{1}{p}$.
2. $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

■ Remarque 6. Interprétation de thm 3. 1) :
En moyenne, le premier succés apparaît à un rang d'ordre $\dfrac{1}{p}$.

■ Exercice 1.
Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique sur $\mathbf{N}^\star$ de paramètres respectifs p, p'. Calculer la loi de $Z = \min(X, Y)$. T1 3

E) Simulation

```python
def geom(p):
    k = 1
    while random()>p: # Ce booléen vaut False avec probabilité p
        k+=1
    return k
```

T3 **Prouver qu'une VAR X suit une loi binomiale ou géométrique**

1. Dans les deux cas, on commence par Identifier une épreuve de Bernoulli (E), son succès et son paramètre de succès p.
2. On précise que l'expérience liée à Y consiste en répétitions **mutuellement indépendantes** de (E). La suite de l'argumentation diffère suivant la loi qui nous intéresse :
   a. Si X compte le **nombre de succès** observés sur un nombre N **fini** de répétitions de (E) : $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(N, p)$
   b. Si X mesure le **temps d'apparition** du 1er succès en répétant (E), alors : $X \rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$

F) Propriétés complémentaires

■ Proposition 3 .... [`Absence de mémoire de la loi géométrique`]
Si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}_{\mathbf{N}^\star}(p)$ alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad \forall k \in \mathbf{N}^\star \quad P(X > n + k | X > n) = P(X > k)}$$

■ Remarque 7.
Interprération : savoir qu'on a déjà fait n essais ne donne aucune information supplémentaire sur le fait d'obtenir un succès k essais plus tard, puisque la relation de la proposition s'écrit :

$$\forall n \geq 0 \quad P_{X>n}(X > n + k) = P_{X>0}(X > 0 + k)$$

preuve de la proposition 3 :

un des rares cas où l'on revient à la déf de $P_B(A)$ pour la calculer.

J'introduis encore l'événement : E_k : "le k^e essai est un échec" (épreuve de Bernoulli associée à la VAR X).

$$P_{X>n}(X>n+k) = \frac{P(X>n+k \cap X>n)}{P(X>n)}$$

Or l'événement $\boxed{\quad}$ implique l'événement $\boxed{\quad}$:

c-à-d : $\boxed{\quad} \subset \boxed{\quad}$

donc $\boxed{\quad} \cap \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$

D'où $P_{X>n}(X>n+k) = \dfrac{P(X>n+k)}{P(X>n)} = \dfrac{q^{n+k}}{q^n} = q^k$

$= P(X>k)$ ■

Exercice 1

Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition de minimum :

$$[Z > t] = [X > t] \cap [X' > t]$$

En passant aux probas :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad P(Z > t) = P([X > t] \cap [X' > t])$$

Comme X et X' sont indépendants :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad P(Z > t) = P(X > t) \times P(X' > t)$$

$$\overset{\text{prop2}}{=} \begin{cases} 1 \times 1 & \text{si } t < 1 \\ q^{\lfloor t \rfloor} \times q'^{\lfloor t \rfloor} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } t < 1 \\ (qq')^{\lfloor t \rfloor} \end{cases} \quad \text{où } \begin{array}{l} q = 1-p \\ q' = 1-p' \end{array}$$

Ce calcul montre que :

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - (qq')^{\lfloor t \rfloor} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

On reconnaît la f.d.rep d'une VAR de loi géométrique $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(1 - qq')$

D'après thm 2 :

$$\boxed{Z \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(\pi) \quad \text{où } \pi = 1 - qq' = p + p' - pp'.}$$

Exemple : Une urne $\mathcal{U}$ contient des boules, noires, blanches.

illustre T_3

Notons p la proportion de boules blanches dans $\mathcal{U}$. ($p \in]0,1[$).

On effectue des tirages successifs avec remise dans $\mathcal{U}$.

On note X la VAR égale au n° du tirage auquel apparaît la 1ère boule blanche.

Donner la loi de X.

Considérons . (E) : "on tire une boule de $\mathcal{U}$. On regarde si elle est blanche".

- (E) est une épreuve de Bernoulli. En considérant que "obtenir blanche" est le succès, cette épreuve est de paramètre p.
- Comme X mesure le temps d'apparition du 1er succès lors de répétitions mutuellement indépendantes de (E), obligatoire

$$X \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p).$$

Rem : cette loi fait partie des lois à connaître.
On peut ici faire le calcul à main

illustre T_2 4) . Détermination de $X(\Omega)$:

au mieux, la boule blanche apparaît dès le premier tirage : $1 \in X(\Omega)$
tout autre rang d'apparition $m \in \mathbb{N}^*$ est possible donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

- je calcule $P(X=k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

Soit $k \in X(\Omega)$: je note B_j : "obtenir du blanc au j^e tirage"

CH9 T_7

$$\underbrace{[X=k]}_{\text{est un évènement CH9 (déf 19)}} = \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \dots \cap \overline{B}_{k-1} \cap B_k$$

En passant aux probas :

$$P([X=k]) = P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \dots \cap \overline{B}_{k-1} \cap B_k)$$

Or les tirages sont supposés mutuellement indépendants :

$$P([X=k]) = \boxed{P(\overline{B}_1) \times P(\overline{B}_2) \times \dots \times P(\overline{B}_{k-1})} \times \boxed{P(B_k)}$$

AN : $P(X=k) = \boxed{q^{k-1}} \times \boxed{p}$ en notant $q = 1-p$
conforme à l'expression déf 5.

Exemple 0 : Une urne contient n boules numérotées de 0 à $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
illustre T_2 2)
(rév. sup)
On tire une boule au hasard.
On note Y la VAR égale au n° observé.
loi de Y ? $E(Y)$? $V(Y)$?

Mauvaise réponse : $Y \sim \mathcal{U}(n)$.
car $Y(\Omega) = \{0 \dots n-1\}$
Or pour la loi $\mathcal{U}(n)$ $X(\Omega) = \{1 \dots n\}$

Bonne approche : j'introduis $X = Y+1$

Comme $Y(\Omega) = \{0 \dots n-1\}$ de façon évidente
$$X(\Omega) = \{1 \dots n\}.$$

Comme la boule est tirée au hasard :
$$X \sim \mathcal{U}(n).$$

loi de Y :

Soit $k \in \{0 \dots n-1\}$ égalités d'évènements

CH9 T_7

Comme la loi de X est connue, je réexprime cet évt en termes de X

$$[Y=k] = [X-1=k] \text{ par déf de } X$$
$$= [X=k+1]$$

d'où $P(Y=k) = P(X=k+1)$

$$\boxed{\forall k \in \{0 \dots n-1\} \; P(Y=k) = \frac{1}{n} \text{ car } X \sim \mathcal{U}(n)}$$

D'après le cours de sup, comme $Y = X-1$

$$E(Y) = E(X) - 1 = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$$
$$V(Y) = V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

tableau p.6

5 Loi de Poisson

A) Définition

■ Définition 6 .... [Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$]

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :

1. $X(\Omega) \subset \mathbf{N}$.
2. $\forall k \in \mathbf{N} \quad P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Dans ce cas on note $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

■ Remarque 8.

1. La loi de Poisson est appelée la loi des évènements rares. En effet : elle compte approximativement le nombre de succès lors d'un grand nombre de répétitions d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes à faible paramètre de succès (une $\mathscr{B}(n, p)$ avec p petit et n grand).
2. Il n'existe pas d'expérience simple (du style : tirage dans une urne) attachée à une variable aléatoire qui suivrait une loi de Poisson.
3. Néanmoins, conformément au point **1.**, par exemple :
   a) Le nombre d'accidents d'avion ayant eu lieu une année sur tous les vols peut être modélisé par une VAR de Poisson.
   b) Le nombre de personnes nées le même jour dans le lycée aussi.

λ : réel (pas forcément entier).

■ Exercice 2.

1. Proposer une expérience de tirage de boule dans une urne liée à une variable de loi $\mathscr{G}_{\mathbf{N}^*}(p)$.
2. Compléter le tableau du **3.B)** en ajoutant une ligne dédiée à la loi géométrique.

■ Exercice 3.

1. Exprimer sous forme de somme de série le réel $S_\lambda = e^\lambda + e^{-\lambda}$ (on simplifiera au maximum la somme obtenue).
2. Soit $\lambda > 0$ et $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$.
   a) Soit A l'évènement : «la valeur observée de X est paire». Exprimer A en termes de X.
   b) Calculer $P(A)$.

] classique et jamais bien fait

B) Fonction de répartition

■ Proposition 4 .... [Fonction de répartition de la loi $\mathscr{P}(\lambda)$]

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ alors pour tout réel t :

$$F_X(t) = \left| \begin{array}{ll} e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor}\frac{\lambda^k}{k!} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Voir prop2.

■ Remarque 9.

Contrairement au cas de la loi géométrique, la fonction de répartition de la loi de Poisson n'a pas d'expression simple.

Exercice 3 $\quad S_\lambda = e^{\lambda} + e^{-\lambda}$

1- Par définition de la série exponentielle :

$$S_\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k + (-\lambda)^k}{k!} \leftarrow \text{la somme est linéaire sur l'ev des séries convergentes}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (1+(-1)^k) \frac{\lambda^k}{k!}$$

Simplifions : $1+(-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Finalement : $S_\lambda = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} 2\frac{\lambda^k}{k!} \underset{\begin{cases} k=2j \\ j \in \mathbb{N} \end{cases}}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} 2\frac{\lambda^{2j}}{(2j)!}$

Finalement : $\boxed{S_\lambda = e^{-\lambda} + e^{\lambda} = 2 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2j}}{(2j)!}}$ $(*)$

$\boxed{(2j)! \neq 2j!}$ parenthèses pas optionnelles

$$(xy)^\alpha = xy \cdot xy \cdot xy \cdots xy = x \cdot x \cdots x \cdot y \cdots y = x^\alpha y^\alpha$$

$$\lambda^k + (-\lambda)^k$$

$$= \lambda^k + (-1)^k \lambda^k \quad \text{car } -\lambda = -1 \times \lambda$$

$$= (1+(-1)^k)\lambda^k$$

2.a. $A \underset{\text{CH9}}{\overset{T_1}{=}} [X=0] \cup [X=2] \cup [X=4] \cup \dots$

$$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [X=2k]$$

2.b. Les évènements $[X=2k]$ sont 2 à 2 incompatibles, donc par σ-additivité, la série de t.g

T_2 CH9 (ou T_3 ?) $P(X=2k)$ converge, et sa somme est $P(A)$:

$$P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \quad \text{car } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$$

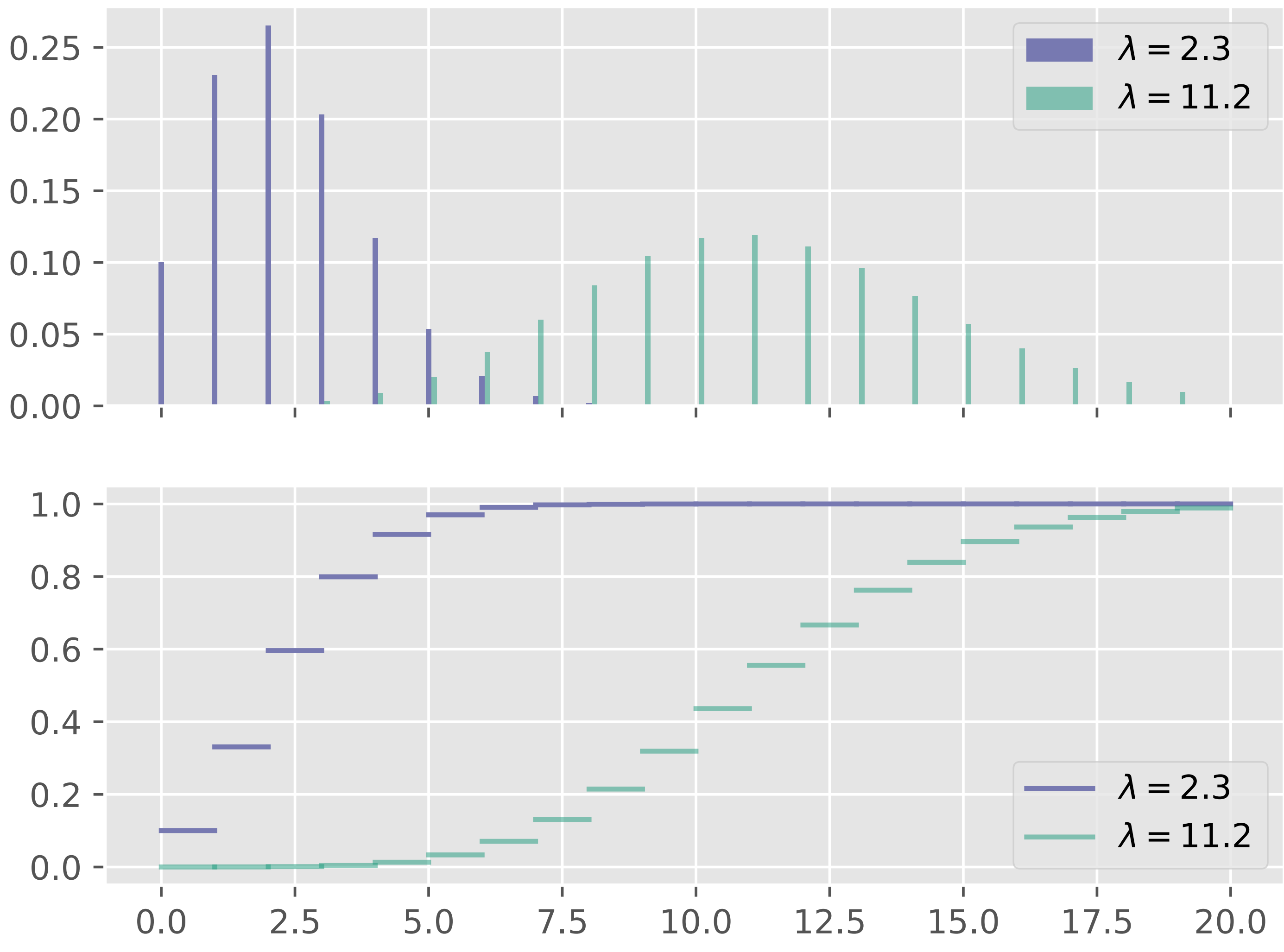
$$\overset{q1)}{=} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \times \frac{1}{2} S_\lambda$$

$$\boxed{P(A) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}}$$

C) Graphique

Lois de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$

Fonction de masse



Fonction de répartition

■ Remarque 10.
On peut remarquer que la fonction de masse se concentre autour des valeurs de k de qui sont de l'ordre de λ (à cause des croissances comparées).

D) Moments

■ Proposition 5 .... [Moments de la loi $\mathscr{P}(\lambda)$]

Si $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ alors X admet espérance et variance et :

1. $E(X) = \lambda$.
2. $V(X) = \lambda$.

E) Simulation

Principe. Voir partie suivante.

```
from random import random
from numpy import exp
def Poisson(lambada):
    k=0
    p = exp(-lambada)  # Initialisation  p_0
    S = p              # F_X(k)
```

```python
7       r = random()
8       while r>S:
9           k+=1
10          p*=lambada/k
11          S+=p            # F_X(k+1)
12      return k
```

- Ligne 3 (*cf.* **Rem.1**) : on ne peut pas donner la fonction de masse en variable d'entrée. On calcule les p_k au fur et à mesure (ligne 10).
- ligne 10 : pour cela, on utilise le fait que la fonction de masse $k \mapsto p_k$ vérifie : $p_0 = e^{-\lambda}$ (ligne 5) et $\forall k \in \mathbb{N}^\star \quad p_k = p_{k-1} \times \dfrac{\lambda}{k}$.

■ Remarque 11.

On peut aussi simplement simuler une loi binomiale de paramètres $N = 100$, $p = \dfrac{\lambda}{100}$, qui donne une bonne approximation de la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ d'après les théorèmes limite.

(Python)

6 Simulation informatique d'une variable aléatoire discrète

IMPASSE IMPOSSIBLE

A) Qu'est-ce que simuler une variable aléatoire discrète ?

■ Définition 7 .... [Simulation d'une variable aléatoire]

Si X est variable aléatoire d'espace image $X(\Omega) = \{x_i \quad i \in I\}$, simuler X, c'est écrire une fonction `f` telle que sur un grand nombre d'appels `N` de `f` (disons `N`≥ 100), `f` renvoie pour tout $i \in I$ la valeur `x[i]` avec une fréquence acceptablement proche de $P(X = x_i)$.

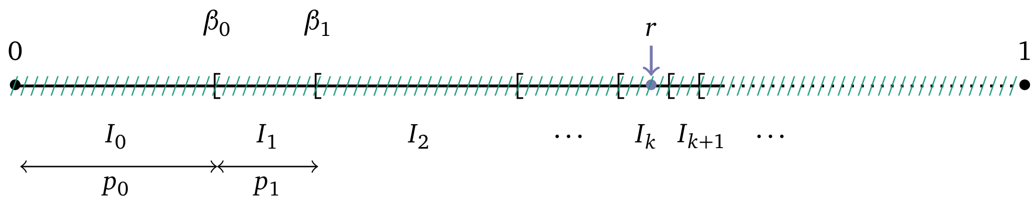
■ Remarque 12.

Autrement dit, les valeurs observées à l'écran de `f` suivent la loi de X, ou dit autrement, se distribuent suivant la loi de X.

B) Principe

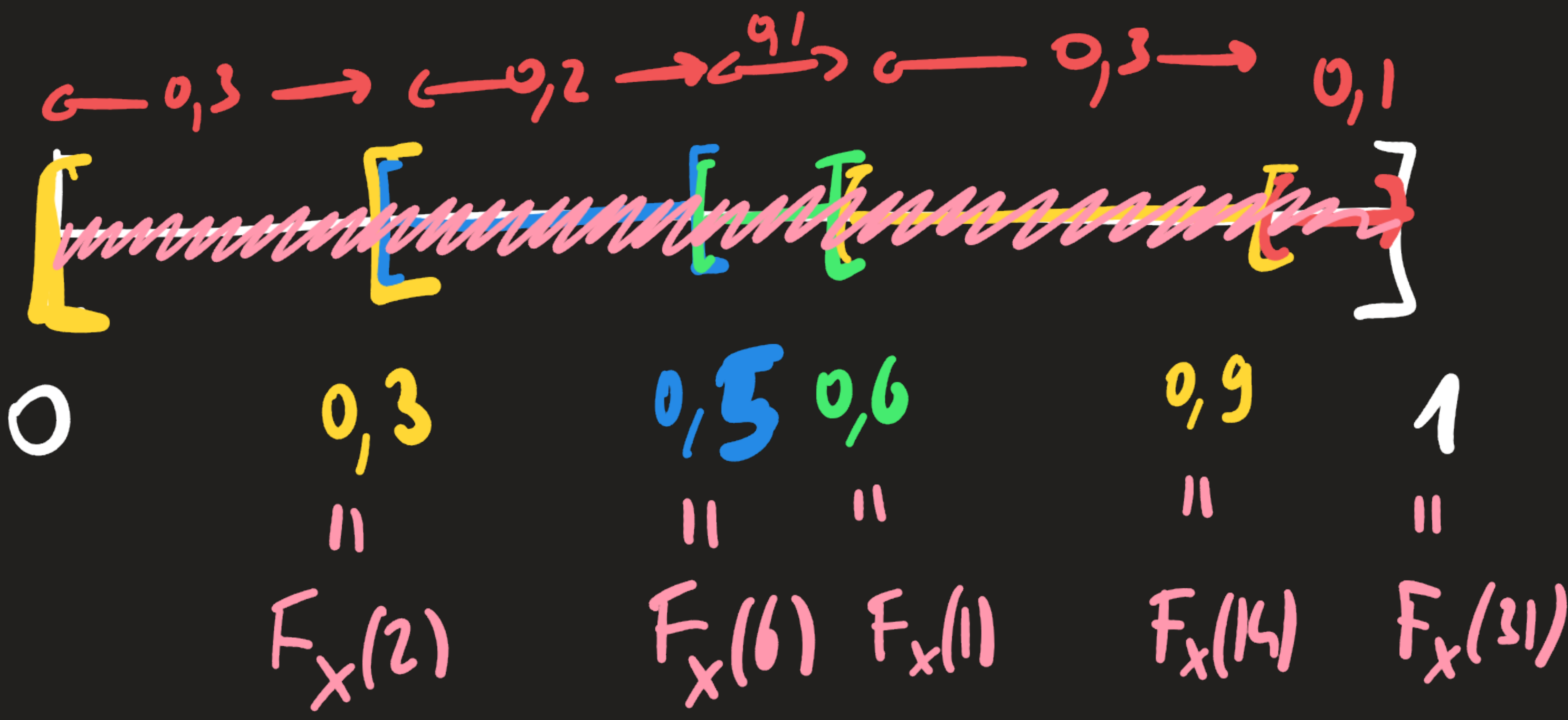
Soit X une VAR discrète notons $X(\Omega) = \{x_0 < x_1 < \ldots, x_n < \ldots\}$ son espace image et posons $p_k = P(X = x_k)$.

1. Comme la série $\sum\limits_{k \geq 0} p_k$ converge et que sa somme vaut 1, on peut partitionner l'intervalle $[0,1[$ en intervalles de I_k de longueur p_k comme sur la figure.
2. On tire un flottant r au hasard dans $[0,1[$ (on a représenté sur le dessin un grand nombre de tirages suivant une loi $\mathscr{U}(0,1)$).
3. *Simulation de X* : comme la proportion de flottants r tombant dans I_k sur un grand nombre de tirages (désinés en hachures) est environ p_k, on décrète que si r tombe dans I_k, la valeur observée de X est alors x_k.



Noter que $\beta_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k = F_X(x_n)$

$k =$	2	6	11	14	31
$P(X=k)$	$\underbrace{30\%}$	$\underbrace{20\%}$	$\underbrace{10\%}$	30%	$\underbrace{10\%}$



Ex : Simuler une VAR $X \sim \mathcal{B}(a)$ c'est programmer une fonction f qui, sur un grand nombre d'appels de f, [renvoie] la valeur a (x_1) avec une fréquence acceptablement proche de $1 = P(X = x_1)$

Ici : $X(\Omega) = \{a\}$ ← x_1
$i = 1$
$I = \{1\}$

Réponse :

```
def f():
    return a
```

> Pour la simulation des lois de sup
> Voir fiche : Fiche révision 21 Probas

2 fonctions les plus utiles en python pour simuler une VAR :

```
import random as rd
rd.random()       : renvoie un flottant au hasard dans [0,1[
rd.randint(a,b)   : a et b entiers. Tire un entier au hasard dans ⟦a,b⟧.
```

Exemple : Soit $X \sim \mathcal{U}(6)$. Simuler X.

$X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$ $P(X=k) = \frac{1}{6}$

déf 7 : on doit programmer une fonction f, qui, sur un grand nombre d'appels de f renvoie les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 à des fréquences de $1/6$ (environ)

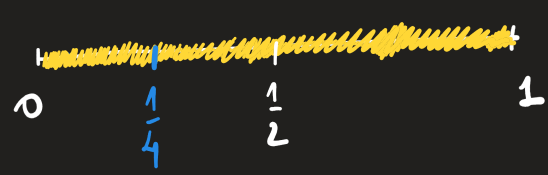
```
def f():
    return rd.randinit(1,6)
```

→ cette fonction simule un lancé de dé, puisqu'elle simule la loi $\mathcal{U}(6)$.

Ex : Simuler une variable $X \sim \mathcal{B}(p)$.

```
def Bern(p):
    r=rd.random()
    if r<p:
        return 1
    return 0
```

$X(\Omega) = \{0,1\}$ ← doit renvoyer 0 ou 1 aux fréquences respectives q et p.



version simplifiée :

```
def Bern(p):
    return rd.random()<p
```

C) Implémentation

Code Python ▼

```
1  def simul(x,p)
2      """
3      entrées (listes de flottants)
4      x = [x0,...] : X(Omega)
5      p = [p0,...] : fonc. de masse
6      sortie : une réalisation de X
7      """
8      k=0
9      p = p[0]
10     S = p
11     r = random()
12     while r>S:
13         k+=1
14         S+=p[k]
15     return x[k]
```

■ **Remarque 13.**
Commentaires sur le script

- Ligne 1 : Si la VAR X prend un nombre **fini** de valeurs, la donnée exhaustive de la fonction de masse `p` en variable d'entrée de `simul(x,p)` est possible (voir **Exple. 1**).
- Lignes 12-14 : Sinon, on essaie dans la boucle `while` de calculer les nombres `p[k]` par récurrence (voir la simulation de la loi de Poisson en III E)).

■ **Exemple 3.**
Simulation de $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(2, 1/3)$:

```
t = 1/3                 # paramètres de la loi binomiale
s = 1-t
x = [0,1,2]             # espace  image de
p = [t**2,2*t*s,s**2]   # loi de X
simul(x,p)
```

7 Moments des variables aléatoires discrètes

A) Moment d'ordre r d'une variable aléatoire

■ **Définition 8** ... Soit $r \in \mathbb{N}$. .... [Moment d'ordre r : $M_{X,r}$]

La VAR X admet un moment d'ordre r si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x)$ est absolument convergente, c'est-à-dire si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} |x|^r P(X = x)$ est convergente. On pose alors :

$$M_{X,r} = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x).$$

■ **Proposition 6** .... [Existence de moments]

Soit $r \in \mathbf{N}^*$. Si X admet un moment d'ordre r, alors tous les moments d'ordre inférieur existent aussi.

$r = 1$

B) Espérance d'une variable aléatoire discrète

■ **Définition 9** .... [Espérance]

La VAR X admet une espérance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 1 $M_{X,1}$, et dans ce cas

$$E(X) = M_{X,1} = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

Interprétation de l'espérance $E(X)$ = valeur moyenne prise par X si on fait un grand nombre de mesures dictées par X.

Ex : si $X \rightsquigarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(1/6)$ (= tps d'apparition du 1er 6 qd on lance un dé).

répétition n°	observation	valeur mesurée de X
lundi 1	$\boxed{6}$	1
Mardi 2	2,3,4,5,1,1,1,3,$\boxed{6}$	8
Me 3	1,2,$\boxed{6}$	3
⋮	⋮	

moyenne $\simeq 6$

preuve de la proposition 6.

Ce qu'on sait : on a une VAR X
on a un entier $r \geq 0$
tels que $\sum_{x \in X(\Omega)} |x^r| P(X=x)$ cvge.

Ce qu'on doit prouver :

Si je prends un entier $0 \leq s \leq r$ alors :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x^s| P(X=x) \text{ cvge.}$$

Soit $x \in X(\Omega)$. De deux choses l'une :

ou bien (1) $|x| \leq 1$

ou bien (2) $|x| > 1$

dans le cas 1) : $|x^s| = |x|^s \leq 1$

2) $|x^s| = |x|^s \leq |x|^r$ car $r \geq s$

Dans tous les cas : $|x^s| \leq 1 + |x^r|$

Finalement : $\forall x \in X(\Omega)\ 0 \leq |x^s| P(X=x) \leq \underbrace{P(X=x)}_{\substack{\text{t.g d'une} \\ \text{série cv} \\ \text{(thm 1)}}} + \underbrace{|x^r| P(X=x)}_{\substack{\text{t.g d'une} \\ \text{série cv} \\ \text{(ce qu'on sait)}}}$

$\forall x \in X(\Omega)\ 0 \leq |x^s| P(X=x) \leq$ cl. de t.g. de séries C.V.

on conclut avec le CCSATP.

$Y = X^2$

$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y P(Y=y)$

■ Proposition 7 .... [Propriétés fonctionnelles de l'espérance]
L'ensemble des VAR discrètes sur Ω admettant un moment d'ordre 1 est un espace vectoriel et l'espérance y est une forme linéaire positive et croissante. Précisément :

1. Si X, Y sont deux VAR discrètes sur Ω admettant une espérance, alors pour tous réels λ, μ, la variable $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et :
$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$
En particulier :
$$E(\lambda X + \mu) = \lambda E(X) + \mu. \quad (*)$$
2. Si X est à valeurs positives quasi-certainement, $E(X) \geq 0$.
3. Si $X \leq Y$: $E(X) \leq E(Y)$.
4. Les grandeurs X et $E(X)$ sont dans les mêmes unités.
5. Si X possède une espérance, la variable notée $X - E(X)$, appelée variable centrée déduite de X, possède aussi une espérance, et celle-ci est nulle.

■ Théorème 4 .... [*Formule de transfert*]
Soit f une fonction définie au moins sur $X(\Omega)$, et Y la VAR donée par $Y = f(X)$. Alors Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)|P(X=x)$ converge **absolument** et dans ce cas :
$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$$

T4 À quoi sert la formule de transfert ?

si Y s'exprime en termes d'une VAR X, mettons $Y = f(X)$, et de loi connue, le **thm. 4** nous donne le calcul de $E(Y)$ à l'aide de la loi de X sans connaître celle de Y.

T5 Comment calculer l'espérance d'une VAR Y ?

1. Si on reconnaît une loi usuelle, $E(Y)$ est obtenu sans calculs.
2. Si Y est une transformée affine d'une VAR X dont on connaît l'espérance $Y = \lambda X + \mu$, on utilise **prop.7 1.** $(*)$
3. Sinon, **T4.**, et les techniques d'étude de convergence des séries à terme positifs (en cas de séries !).

C) Variance. Écart-type

■ Proposition 8 .... [Existence de la variance et du moment d'ordre 2]
Soit X une VAR. Sont équivalents :

1. X admet une variance.
2. X admet un moment d'ordre 2. utile

<u>Exemple</u> : La française des jeux lance un nouveau jeu en ligne :

- un joueur s'inscrit : il paye 5 €.
- Cela lui donne le droit de jouer une partie : le jeu consiste en suite de lancers de pièce (équilibrée) :
  - on regarde le rang d'apparition X du premier face (= variable aléatoire)
  - Si X prend la valeur n, il empoche αn^2 euros où $\alpha > 0$ est à préciser

Calculer le gain net moyen G du joueur.

Expression du gain :

$$G = -5 + \alpha X^2$$

Toujours se poser la question : est-ce que $E(G)$ existe :

① X suit une loi géom : elle mesure le tps d'apparition du 1er succès lors de répétitions mutuellement indép de l'épreuve de Bernoulli : "lancer la pièce". Succès : obtenir face.

$$X \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(1/2)$$

② On sait que X admet une variance (thm3) donc un moment d'ordre 2 (prop8) : $E(X^2)$ existe.

③ Comme $G = -5 + \alpha X^2$ et que l'ens des VAR admettant une espérance est un ev (prop 7.1), G admet une espérance et $E(G) = -5 + \alpha E(X^2)$

Calculons $E(X^2)$ (on pourrait utiliser Koenig, mais ici, j'utilise thm4 pour avoir un exemple) : existe par ②

$$E(X^2) \overset{\text{thm4}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X=k)$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

$$\overset{\text{thm5}}{=} E(X)^2 + V(X)$$

$$\underset{\text{thm3}}{=} 2^2 + \frac{1/2}{(1/2)^2} = 4 + 2 = 6$$

Finalement $E(G) = -5 + 6\alpha$

Ce jeu est rentable si $E(G) < 0$

i.e. $-5 + 6\alpha < 0$

i.e. $\alpha < \frac{5}{6}$

P.ex : La Fr. des jeux empochera de l'argent avec $\alpha = 1/2$.

Si $\alpha = 1/2$ $E(G) = -2$

La Fr des jeux empoche en moyenne 2€ par participation.

Rem : tous les jeux d'argent doivent être à somme négative pour être rentables. (c'est le cas ici : $E(G) < 0$)

■ **Définition 10** .... [Variance - écart-type]

1. La variance de X est définie sous réserve d'existence par :
$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$
2. L'écart-type de X, noté σ_X est défini alors par
$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

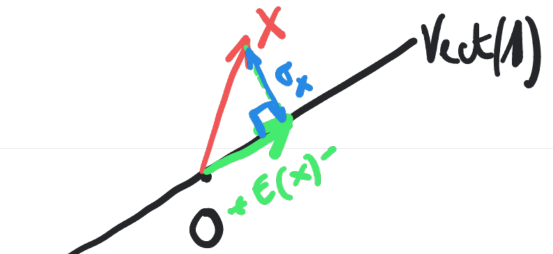
■ **Proposition 9** .... [Propriétés fonctionnelles de la variance]

1. (*Positivité*). $V(X) \geq 0$.
2. (*Homogénéité*.) Si X est exprimée en unités u, $V(X)$ est en unité u^2, et σ_X en unités u.
3. (*Homogénité et invariance par translation*). Si a, b sont deux réels, $aX + b$ admet une variance et :
$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$
4. $V(X) = 0$ si et seulement si X suit une loi quasi-certaine.

T6 **Prouver l'existence de la variance**

1. Si l'énoncé de demande de prouver l'existence de l'espérance et de la variance, on peut prouver seulement l'existence du moment d'ordre 2 et conclure avec **prop. 6** et **déf. 9**
2. Par contraposition de **prop. 6** : si le moment d'ordre 1 n'existe pas, cela prouve que la V.A.R. n'a ni espérance, ni variance.

■ **Théorème 5** .... [*Formule de Koenig*]
Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. Si X admet une variance, alors X admet un moment d'ordre 2, une espérance et :
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$



Pythagore

$E(X)^2 + \sigma_X^2 = E(X^2)$

T7 **Calculer la variance d'une VAR Y**

1. Si on reconnaît une loi usuelle, $V(Y)$ est obtenu sans calculs
2. Si Y est une transformée affine d'une VAR X dont on connaît la variance, $Y = aX + b$, on utilise **prop.9 3.**
3. Sinon, on applique **Thm. 5**.
