CH12 – Intégrales généralisées

· sont aux VAR à densité ce que les séries sont aux VAR discrètes.

Plan du chapitre

Liste des définitions

Liste des techniques de base

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. **T_0** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

1 Classification des intégrales. Impropriétés

A) Intégrales classiques

■ Définition 1 .... [Intégrale classique]
On appelle intégrale classique l'intégrale sur un segment $[a,b]$ de toute fonction continue f sur $[a,b]$.

■ Remarque 1.
En particulier :**1.** b est réel, et **2.** f est continue en b.

■ Définition 2 .... [Fonction indicatrice d'un ensemble]
Si A est un sous-ensemble d'un ensemble E, la *fonction indicatrice de* A est la fonction notée $\mathbf{1}_A$ définie par

$$\mathbf{1}_A \ : \ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \left| \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in A \\ 0 & \text{si} & x \notin A \end{array} \right. \end{array} .$$

■ Remarque 2.
C'est une fonction qui ne prend que deux valeurs : 0 et 1.

■ Définition 3 .... [Restriction d'une fonction à un ensemble]
Si f est une fonction de domaine de définition $\mathscr{D}_f$ et $I \subset \mathscr{D}_f$, on appelle restriction de f à I la fonction :

1. notée $f_{|I}$,
2. de domaine de définition I,
3. définie par : $\forall x \in I \quad f_{|I}(x) = f(x)$.

⚠ $f \neq f_{|I}$

B) Intégrale généralisée d'une fonction continue sur $[a,b[$.

■ Définition 4 .... [Intégrale généralisée]
Toute intégrale qui n'est pas classique.

■ Définition 5 .... [Impropriété d'une intégrale généralisée]
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$. Si b ne vérifie pas une deux conditions de la **Rem. 1**, c'est-à-dire si :

1. $b = +\infty$,
2. ou si $f_{|[a,b[}$ ne peut pas se prolonger par continuité en b, [a]

alors b s'appelle une impropriété de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

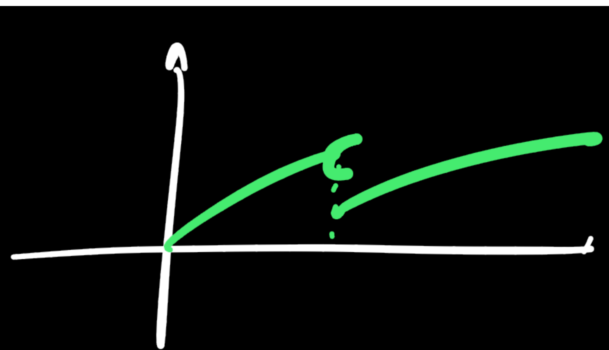
[a] Ou, dit autrement, $f_{|[a,b[}$ n'est pas la restriction d'une fonction d'une fonction g continue sur $[a,b]$.

■ Proposition 1 .... [absence d'impropriété]
Un point de continuité d'une fonction f ne peut être une impropriété de l'intégrale de f.

■ Définition 6 .... [Intégrale généralisée faussement impropre - fausse impropriété]
sous-entend que $b \notin \mathscr{D}_f$
Si $f \in \mathscr{C}^0([a,b[)$ est prolongeable par continuité en b, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite faussement impropre, et b est une fausse impropriété de l'intégrale. Sinon, elle est dite vraiment impropre.

■ Remarque 3.
Il ne peut donc y avoir de fausse impropriété en un point de $\mathscr{D}_f$.

Def 3.5. Si f est définie en b et que $f_{|[a,b[}$ se prolonge par continuité en b, on dit que f est continue par morceaux en b.

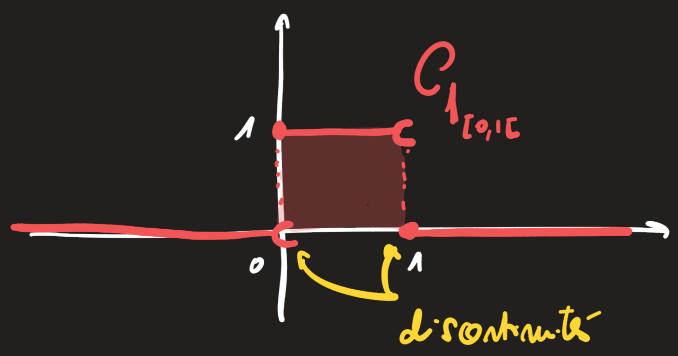


Fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1[$:

$$\mathbb{1}_{[0,1[} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x\in[0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

illustre déf 2

(1)



(2) P. ex. : $\int_0^1 \mathbb{1}_{[0,1[}(t)\,dt$ n'est pas une intégrale classique.

illustre déf 3

$f : x \mapsto x^2$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f_{|[0,1]} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

- $f \neq f_{|[0,1]}$.
- Mais : $\forall x\in[0,1]\quad f(x) = f_{|[0,1]}(x)$

(3) $\mathbb{1}_{[0,1[}$ n'est pas continue en 1.

À comprendre : mais $\mathbb{1}_{[0,1[}\big|_{[0,1[}$ est continue partout où elle est définie.

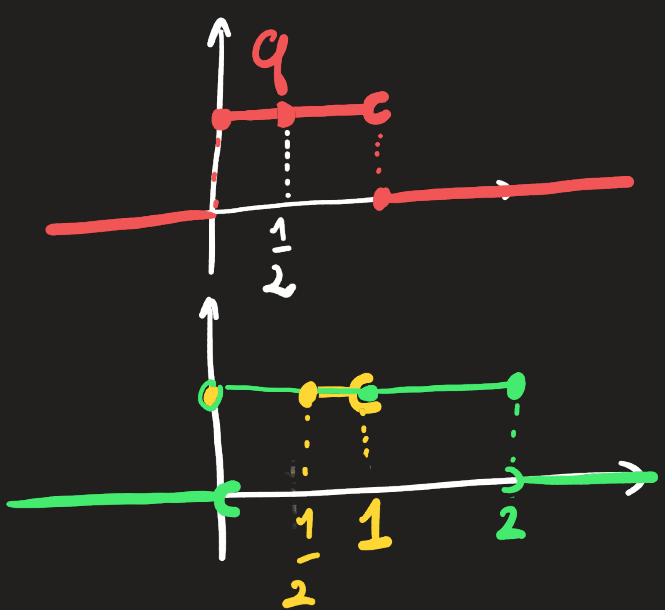
---

illustre déf 6

$\boxed{\text{K1}}$

$$I = \int_{1/2}^{1} \mathbb{1}_{[0,1[}(t)\,dt . \qquad f = \mathbb{1}_{[0,1[} \in C^0([\tfrac{1}{2},1[)$$

donc I est généralisée.

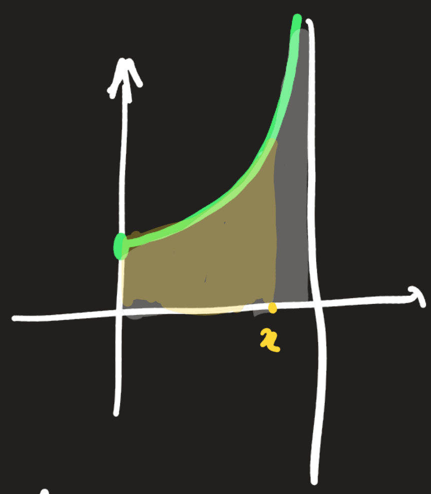


Mais $f_{|[\frac{1}{2},1[}$ est la restriction de $\mathbb{1}_{[0,2]}$ qui est continue en 1 par exemple.

I n'est pas en réalité une intégrale généralisée : 1 n'est pas une vraie impropriété de I : c'est une fausse impropriété de I.

$\boxed{K2}$

$$f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{1-x}$$



$f \in C^0([0,1[)$

et f n'est pas C^0_{pm} en 1

Conclusion : $\int_0^1 f\,dt$ est une intégrale généralisée

et 1 est une vraie impropriété de I.

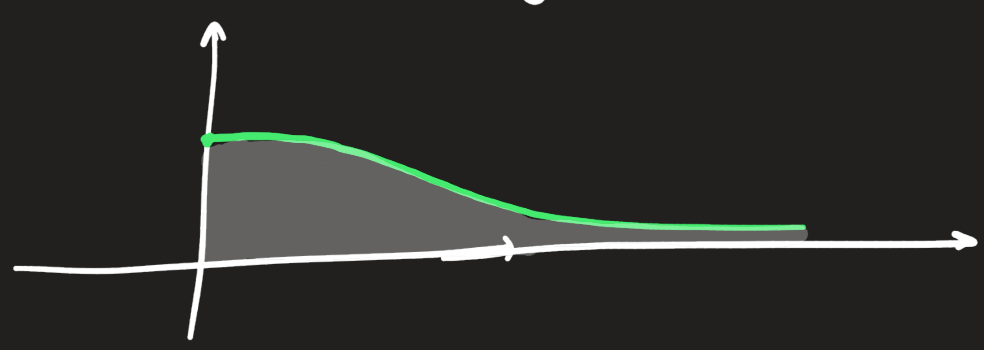
$\boxed{K3}$

$$f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

$f \in C^0([0,+\infty[)$

$+\infty$: vraie impropriété (déf 5).

$\int_0^{+\infty} f\,dt$ est généralisée.



C) Convergence de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ pour $f \in \mathscr{C}^0([a,b[)$

■ Définition 7 ..... [Intégrales partielles associées à une intégrale généralisée - nature]

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. Les intégrales partielles sont les intégrales $I(x)$ définies par :

$$\forall x \in]a,b[\quad I(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

■ Remarque 4.

En tant qu'intégrales classiques, les intégrales partielles se manipulent sans précaution.

■ Définition 8 .... [Intégrale généralisée convergente - divergente - nature]

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. Avec les notations de la définition précédente :

1. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si $\displaystyle\lim_{\substack{x \to b \\ <}} I(x)$ existe dans $\mathbf{R}$. Cette limite est alors notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t := \lim_{\substack{x \to b \\ <}} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$
2. Sinon, on dit que l'intégrale est divergente.
3. Étudier la nature d'une intégrale impropre, c'est déterminer si elle est convergente.

■ Remarque 5.

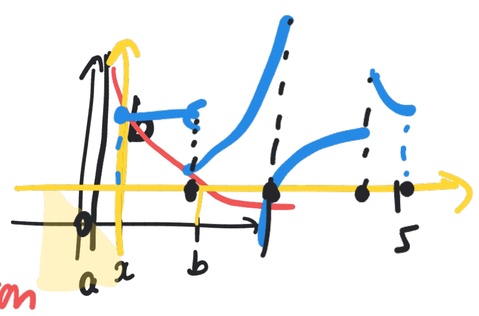
Dans le cas où $f \in \mathscr{C}^0(]a,b])$, les mêmes notions que précédemment se définissent pour le point a :

1. Le point a est une impropriété si $a = -\infty$ ou $\displaystyle\lim_{\substack{t \to a \\ >}} f_{|]a,b]}$ n'existe pas dans $\mathbf{R}$.
2. Le point a est une fausse impropriété si f est prolongeable par continuité en a.
3. Les intégrales partielles sont définies par : $\forall x \in]a,b] \quad I(x) = \displaystyle\int_x^a f(t)\mathrm{d}t.$
4. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ >}} I(x)$ existe dans $\mathbf{R}$.

D) Intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle sauf au plus en un nombre fini de points

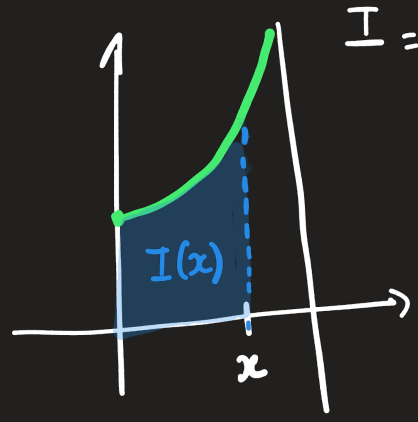
T1 Comment faire si l'intégrale présente plusieurs impropriétés ?

Puisque f est continue sur un intervalle I sauf au plus en un nombre fini de points, on peut numéroter ses (possibles) points de discontinuité $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.



1. On réduit le nombre d'impropriétés (si possible) à étudier :
   a) Exploiter les éventuelles propriétés de parité de l'intégrande pour cela. **Prop 2. 5.** cf exple 6 pour la rédaction
   b) Si f est nulle au voisinage $[A,+\infty[$ de $+\infty$, on peut affirmer que l'intégrale généralisée $\int_A^{+\infty} f$ est convergente, et nulle (par définition).
2. On détermine parmi les x_i restants les vraies impropriétés de f.
3. Les impropriétés s'étudient ensuite **séparément** : en pratique, on fixe un intervalle arbitraire $J = [a, x_k[$ ou $J =]x_k, b]$ dont x_k est l'unique impropriété de l'intégrale de f sur J, et on suit ensuite **T2**.

illustre déf 7



Les intégrales partielles de

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1-t}\,dt$$ sont les intégrales :

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt \quad \text{où } x \in]0,1[$$

Se primitive à une en :

$$I(x) = -\ln(1-x)$$

Nature de I : si $x \to 1$ $I(x) \to +\infty$.

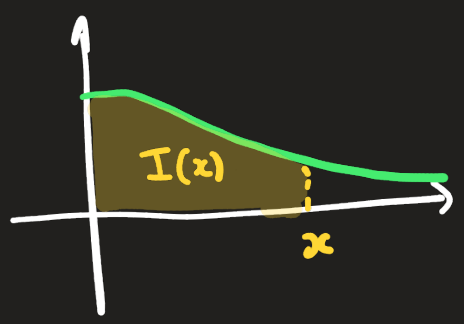
illustre déf 8 L'intégrale I est divergente.

$\boxed{K_3'}$ suite de $\boxed{K_3}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Intégrales partielles :

$$\forall x > 0 : I(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctan} x$$



Nature : Si $x \to +\infty$, $I(x) \to \frac{\pi}{2}$.

Donc l'intégrale I est convergente

On écrit : $$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}}$$

2 Détermination de la nature d'une intégrale généralisée

$\int_a^b f(t)dt$ avec $f \in C^0([a,b[)$

sens de parcours

A) Qualification des intégrales

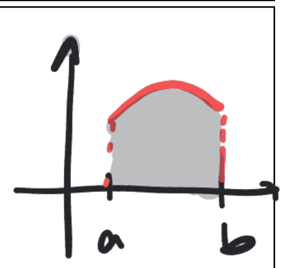
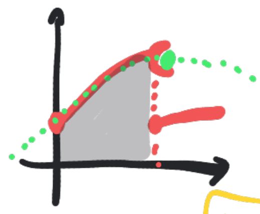
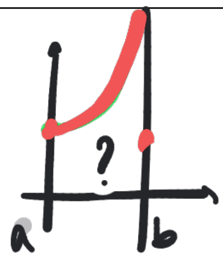
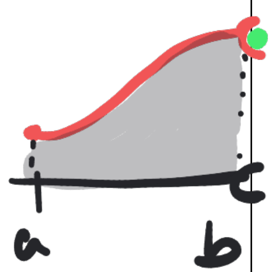
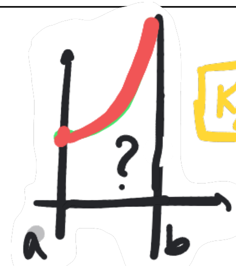
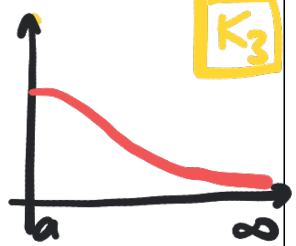
A. Statut de f	B. Étude en b de f			C. Qualification de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$	D. Nature de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$	E. Dessin et réf.
1. $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$	sans objet			Classique	Pa de pb de ne converge	
2. $f \in \mathscr{C}^0([a,b[)$	**2a)** $b \in \mathscr{D}_f$		**i)** $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ <}} f(t)$ existe dans $\mathbf{R}$	Classique C^0p.m	converge	 K1
			ii) $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ <}} f(t)$ n'existe pas dans $\mathbf{R}$	b est une vraie impropriété	Étude requise *cf.* T2 **2.**	
	2b) $b \notin \mathscr{D}_f$	$b \in \mathbf{R}$	**i)** $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ <}} f(t)$ existe dans $\mathbf{R}$	b est une fausse impropriété	converge	
			ii) $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ <}} f(t)$ n'existe pas dans $\mathbf{R}$	b est une vraie impropriété	Étude requise *cf.* T2 **2.**	 K2
		$b = \infty$		b est une vraie impropriété	Étude requise *cf.* T2 **2.**	 K3

Table 1 – Tableau de qualification d'une intégrale

$f_4$bis exo 1
f_5 exo 1

f_4 exo 1

f_3 exo 1
I exo2

f_1 et f_2 exo 1
f_2
J exo2

■ **Exercice 1.**
Qualifier les intégrales des fonctions suivantes.

1.
$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & te^{-t} \end{array} \qquad I_1 = \int_0^{+\infty} f_1(t)\mathrm{d}t.$$

2.
$$f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & t^2e^{-t} \end{array} \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} f_2(t)\mathrm{d}t.$$

3.
$$f_3 : \begin{array}{rcl}]0;1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \end{array} \qquad I_3 = \int_0^{1} f_3(t)\mathrm{d}t.$$

4.
$$f_4 : \begin{array}{rcl}]0;1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{e^t-1}{t} \end{array} \qquad I_4 = \int_0^{1} f_4(t)\mathrm{d}t.$$

5.
$$f_5 : \begin{array}{rcl}]-\infty;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases} \end{array} \qquad I_5 = \int_0^{1} f_5(t)\mathrm{d}t.$$

B) Plan d'étude d'une intégrale généralisée

T₂ Comment étudier la nature d'une intégrale $\int_a^b f$ pour $f \in \mathscr{C}^0([a,b[)$?

1. On **qualifie l'intégrale** par la table 1, et ce, **avant tout calcul**.
2. Si la qualification requiert une étude pour conclure sur la nature (colonne **D.** du tableau de qualification) :
   - **a)** On peut essayer de reconnaître le moment d'une loi usuelle pour conclure. → exemple 6
   - **b)** **i)** Sinon on calcule les intégrales partielles $I(x)$ par les méthodes classiques du calcul intégral, et on calcule la limite de $I(x)$ par les méthodes connues de calcul de limite. → K3
     ii) On peut aussi opter pour les versions généralisées des méthodes de calcul intégral *avec les précautions d'usage*. → exemples 1 et 2,3
   - **c)** Sinon on analyse l'intégrande f.
     i) Si f est positive au voisinage de b :
       A. On calcule un équivalent de f et on utilise XXXX thm 2
       B. Sinon, on utilise le XXXX thm 3
     ii) Sinon ou essaie de prouver l'absolue convergence et on applique les méthodes de **c)** à la fonction $|f|$.
3. ☠ Sauf pour 3A1.1 ou 3A1.2. et phrase d'usage qui l'accompagne, on ne manipule **jamais** l'intégrale généralisée avant d'avoir établi sa convergence.

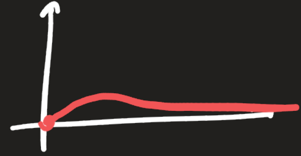
à rapprocher du plan d'étude de la nature des séries

séries	intégrales
t.g.	intégrande
sommes partielles	intégrales partielles
ég. tg ≥ 0	ég d'intégrandes
CCSATP	thm 3
abs cv	abs cv
☠	☠

1- $f_1 \in C^0([0,+\infty[)$ $\quad I_1 = \int_0^{+\infty} f_1(t)\,dt$.

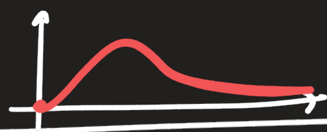
Comme f_1 est $C^0(\mathbb{R}_+)$ la seule impropriété de I_1 est en $+\infty$: I_1 est vraiment impropre

d'après prop 1



---

2. I_2 est impropre en $+\infty$ et nulle part ailleurs (même cy[illegible] qu'en 1)



---

3. $f_3 : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$

(agro oral type)

f est $C^0(]0,1[)$: pas d'impropriété en un point de $]0,1[$ (prop 1).

Si $t \underset{>}{\to} 0$: $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

car $t(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} t \times 1$ par produit d'éq.

$\sqrt{t(1-t)} \sim \sqrt{t}$ car les éq. passent aux racines.

$f_3(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ . . . . . .

. . . . inverses.

$\to$ vraie impropriété en 0.

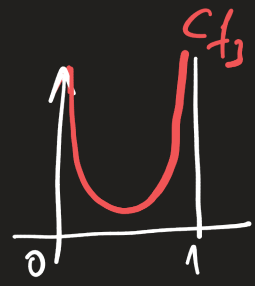
Si $t \to 1^-$ posons $t = 1-h$ $\quad h \to 0^+$

$f_3(t) = \dfrac{1}{\sqrt{h(1-h)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{h}} \to +\infty$

d'après ce qui précède.

$\to$ vraie impropriété en 1.

$\boxed{I_3 \text{ a deux impropriétés : en 0 et en 1}}$



$f_4 : t \mapsto \dfrac{e^t - 1}{t}$ $\qquad I_4 = \int_0^1 f_4(t)\,dt$

$]0,1] \to \mathbb{R}$

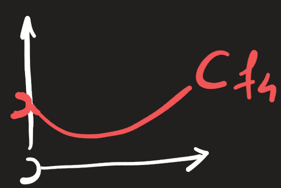
$f_4 \in C^0(]0,1])$: pas d'impropriété dans $]0,1]$.

Étude en 0 : Si $t \to 0$ par équivalents usuels et quotient d'équivalents :

$$f_4(t) \underset{0}{\sim} \frac{t}{t} = 1.$$

Donc f_4 est prolongeable par continuité en 0.

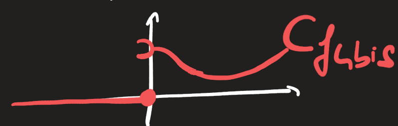
$0 \notin D_f$: I_4 faussement impropre (donc convergente)



- f_{4bis} : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $t \to \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si } t = 0. \end{cases}$ $\qquad I_{4bis} = \int_0^1 f_{4bis}\,dt$

$0 \in D_{f_{4bis}}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f_{4bis} = 1$: C^0_{pm} en 0.

I_{4bis} = classique.



$f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{t^2} & t > 1 \\ 0 & t \leq 1 \end{cases}$

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$I = \int_1^2 f_5(t)\,dt$

$f_5 \in C^0(]1,2])$: pas d'impropriété dans $]1,2]$.

Étude en 1 : $\lim\limits_{\substack{t \to 1 \\ >}} f$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 1

f est C^0_{pm} en 1 : l'intégrale est CLASSIQUE

3 Outils d'étude des intégrales généralisées

A) Version généralisée des techniques de calcul intégral

1. version généralisée de l'intégration par parties

T3 **Comment rédiger une IPP sur une intégrale généralisée ?**

1. Après avoir trouvé deux fonctions $\mathscr{C}^1$ telles que $f = u'v$, on écrit quelque chose comme : «*l'intégration par parties suivante est valide dès lors qu'on aura montré que deux des trois quantités apparaissant dans l'égalité existent dans* $\mathbb{R}$.»
2. Cas typique : étude de suites récurrentes (I_n) d'intégrales généralisées. On montre par récurrence que I_n est convergente. Grâce à l'IPP et l'hypothèse de récurrence, on déduit que I_{n+1} converge en établissant la convergence du terme tout intégré.

ex 99 : 1,2,5
ex 100

Ex 100 TD.

Exemple 1.
Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$.

2. Version généralisée du changement de variables

Théorème 1 .... [*Changement de variables*]
Soit φ une bijection strictement monotone et de classe $\mathscr{C}^1$ de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$ Alors :

1. Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.
2. En cas de convergence, elles sont égales.

Exemple 2.
Étude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t}}$. On pourra poser $u = \sqrt{t}$.

T4 **Comment rédiger un changement de variables sur $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$**

1. Attention, un changement de variables ne transformera **jamais** une intégrale impropre en une intégrale classique. Au mieux, elle est faussement impropre. La nouvelle intégrale impropre obtenue s'analysera avec les méthodes listées précédemment.
2. On écrit quelque chose comme : «*On définit bien un changement de variables bijectif (dé)-croissant de classe $\mathscr{C}^1$ de $u \in$ [à bien choisir pour avoir qqch de bijectif monotone !] sur $t \in (a,b)$.*» Ensuite on ajoute «*On ne change ni la nature ni valeur en cas de convergence de l'intégrale par ce changement de variables*»

Exemple 1

$\boxed{T_3}$

1. Qualification : fait exercice 1, f_1.

Posons $u : t \mapsto -e^{-t}$

$v : t \mapsto t$

les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$

Comme $f = u'v$, L'IPP ci-dessous est valide si on établit la convergence de 2 des trois termes apparaissant :

$$I = \int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = \underbrace{\left[-te^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{A} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt}_{B}$$

- Convergence de A : par croissances comparées en $+\infty$:

$$te^{-t} = o(1) \quad t \to +\infty.$$

- Convergence de B : Comme exp est $C^0(\mathbb{R})$, la seule impropriété de B est en $+\infty$.

On calcule les intégrales partielles :

Soit $x > 0$: $B(x) = \int_0^x e^{-t}\,dt = 1 - e^{-x} \underset{x \to +\infty}{=} 1 + o(1)$

donc B converge et vaut 1.

- Conclusion : $\boxed{I \text{ converge et } I = 0 + 1 = 1}$

Rem : CH13 { on peut dire : I = moment d'ordre 1 d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, donc I existe et vaut $\frac{1}{1} = 1$

Exemple 2 (T4) $\quad J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2(t+\sqrt{t})}$

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$t \mapsto \frac{1}{2(t+\sqrt{t})}$$

f est $C^0([1,+\infty[)$ donc il ne peut y avoir d'impropriété en $t \in [1,+\infty[$: J est vraiment impropre seulement en $+\infty$.

On donne : $u = \sqrt{t}$ $\qquad t \longmapsto \sqrt{t} = u$ définit un changement de variables C^1 bijectif croissant de $t \in [1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[\ni u$.

D'après le cours, on ne change ni la nature ni la valeur de J (en cas de cvgence) par chgt de variables :

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{2u\,du}{2(u^2+u)} \qquad \boxed{t = u^2} \quad \boxed{dt = 2u\,du}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+u}\,du = G$$

impropre avec une seule impropriété en $+\infty$

On introduit les intégrales partielles :

$$G(x) = \int_1^x \frac{du}{1+u} = \Big[\ln(1+u)\Big]_1^x = \ln\left|\frac{x+1}{2}\right|$$

$$G(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc $\boxed{J \text{ est divergente}}$

■ **Exemple 3.**

$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$. On posera $t = \dfrac{1+\sin(u)}{2}$. ← déjà qualifié

■ **Exemple 4.**

Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t$. idem

■ ~~**Exemple 5.**~~

Étude de $\cancel{\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\mathrm{d}t}$ idem

■ **Exemple 6.**

Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ idem.

■ **Exercice 2.**

(*Classique et récurrent : intégrales de Riemann*) à savoir faire

Soit $\alpha > 0$ un réel. On pose $I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et $J_\alpha = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$. Étudier la convergence de I_α et de J_α.

B) Outils spécifiques à l'étude d'intégrandes positives

1. Équivalents des intégrandes

■ **Théorème 2** ....[*Équivalents des intégrales de fonctions positives*]

Soit $I = [a, b[$ un intervalle non vide, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions positives continues sur I. On suppose que :

$$\begin{cases} f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t) \\ f(t) > 0 \text{ sur un voisinage de } b. \end{cases}$$

on travaille sur l'intégrande

Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

■ **Exemple 7.**

Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\cos^2 t}$ sur $[0, +\infty[$.

2. Théorème de comparaison des intégrandes

si l'intégrande est positive, on peut utiliser le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives en **travaillant avec l'intégrande**.

■ **Théorème 3** ....(analogue du CCSATP)....[*Théorème de comparaison*]

Soit $I = [a, b[$ un intervalle non vide, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions positives continues sur I. On suppose que :

$$\forall t \in I \quad 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors :

1. $\displaystyle\int_a^b f$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g$ diverge
2. $\displaystyle\int_a^b g$ converge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f$ converge.

Exemple 7 : $I = \int_0^{+\infty} f(t)dt \qquad f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2+\cos^2 t}$

$f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ car : si $t > 0 \quad t^2+\cos^2 t \geq t^2 > 0$

si $t = 0 \quad t^2+\cos^2 t = 1 > 0$

- En tant qu'inverse d'une fonction $C^0(\mathbb{R})$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, f est bien $C^0(\mathbb{R}_+)$.
- Donc en tout réel $x \in \mathbb{R}_+$ il n'y a pas d'impropriété.
- I est donc généralisée en $+\infty$ seulement.

f étant positive en $+\infty$, et

$$f(t) = \frac{1}{t^2\left(1+\left(\frac{\cos t}{t}\right)^2\right)} \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{t^2(1+o(1))}$$

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

Or on a vu que $J = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ existe) exo2

donc par théorème 2 : $\int_1^{+\infty} f$ existe

Comme $\int_0^1 f$ est classique, $\int_0^{+\infty} f$ existe ■

Exercice 2 :

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \qquad \alpha > 0$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est $C^0(\mathbb{R}_+^*)$

Il n'y a pas d'impropriété en $x \in]0,+\infty[$

Conclusion : I a une seule impropriété : en 0
J . . . . en $+\infty$.

Étude de I : $\frac{1}{t^\alpha} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$: vraie impropriété

à primitive à vue → intégrale partielle :

Soit $x > 0$ $x \to 0$, considérons :

$$I(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \int_x^1 t^{-\alpha} dt$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\right]_x^1 & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \left[\ln|t|\right]_x^1 \end{cases}$$

<u>1er cas</u> : $\alpha = 1$. $I(x) = -\ln x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$

$\boxed{\text{intégrale } I \text{ divergente}}$

<u>2e cas</u> $\alpha \neq 1$ $\quad I(x) = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right)$

or si $x \underset{>}{\to} 0$: $x^{1-\alpha} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & 1-\alpha > 0 \text{ . converge} \\ 1 & \text{si } 1-\alpha = 0 \text{ exclu} \\ \infty & 1-\alpha < 0 \text{ diverge} \end{cases}$

$\boxed{\text{Conclusion: } I \text{ existe ssi } 0 < \alpha < 1 \text{ et } I = \frac{1}{1-\alpha}}$

Étude J : même approche :

Soit $x > 1$, $x \to +\infty$ $\quad J(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln x & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha} - 1\right] \end{cases}$

Si $\alpha = 1$ $\quad J(x) \longrightarrow +\infty$

Si $\alpha \neq 1$: $J(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \text{ converge} \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \text{ exclu} \\ \infty & \alpha < 1 \text{ diverge} \end{cases}$

$\boxed{\text{Conclusion: } J \text{ existe ssi } \alpha > 1 \text{ et } J = \frac{1}{\alpha - 1}}$

Exemple 6. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$

- $f \in C^0(\mathbb{R})$: il n'y a donc pas d'impropriété en $x \in \mathbb{R}$.

  I a deux impropriétés : en $-\infty$ et $+\infty$.

T1 - Comme f est paire I et $J = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature, et en cas de convergence :

$$I = 2J. \text{ (prop. 2.5)}$$

- Il suffit d'étudier J :

  fait en exemple $K_3 + K_3'$

- Conclusion : I existe et $\boxed{I = \pi}$

Exemple 4 : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt$

CM13
Soit $\sigma > 0$ défini par $2\sigma^2 = 1$.
Soit X une VAR de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
D'après le cours cette VAR admet une variance, qui vaut $\sigma^2 = 1/2$, c-à-d :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1.$$

Conclusion : I existe et $I = \sqrt{2\pi\sigma^2} = \sqrt{\pi}$.

Exemple 3

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$ déjà qualifiée.

Deux impropriétés : 0 et 1.

$t = \frac{1+\sin u}{2}$ (vrai chgt de variables)

$\to$ trouver un intervalle $u \in]\alpha,\beta[$ sur lequel $u \mapsto \frac{1+\sin u}{2}$ est strictement monotone et prend ses valeurs sur $]0,1[$: $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ conviennent.

Le changement de variables $\begin{array}{l} u \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow]0,1[\\ u \mapsto t = \frac{1+\sin u}{2} \end{array}$

est bijectif, C^1, strictement croissant.

Donc par ce changement de variables, on ne change ni la nature, ni la valeur de I en cas de convergence.

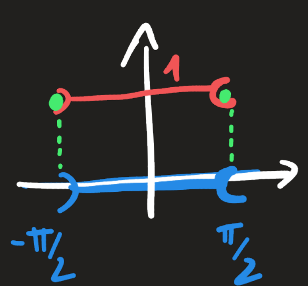
u	$-\pi/2$	$\pi/2$
$t =$	0	1

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\cos u \, du}{\sqrt{\frac{1+\sin u}{2} \cdot \frac{1-\sin u}{2}}}$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cancel{1/2} \cos du}{\sqrt{\cancel{(1/2)^2}(1-\sin^2 u)}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u \, du}{\sqrt{\cos^2 u}}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{|\cos u|} du$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos u}{\cos u} du$$ car $u \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$



$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, du$$ intégrale d'une fonction $C^0(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

$\to$ intégrale doublement faussement impropre en $\pm\pi/2$ car l'intégrande se prolonge par continuité en $\pm\pi/2$.

Conclusion : I existe et $\boxed{I = \pi}$.

■ **Exemple 8.**

Étude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+\cos^2 t}\mathrm{d}t$.

4 Absolue convergence

■ **Définition 9** .... [Absolue convergence]

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite convergente si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

■ **Théorème 4** .... [*Condition suffisante de convergence*]

Si l'intégrale généralisée de f est absolument convergente, alors elle est convergente. De plus il est vrai dans ce cas que :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$

■ **Exemple 9.**

$$\int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \quad \text{où} \quad g(t) := \frac{\sin(e^t)}{t^2+\cos^2 t}.$$

Se ramener à l'exemple précédent en remarquant que $|g(t)| \leq f(t)$.

5 Propriétés fonctionnelles de l'intégrale généralisée

■ **Proposition 2** .... [Propriétés fonctionnelles de l'intégrale]

1. **Relation de Chasles.** Ne peut s'utiliser sur une intégrale généralisée qu'après avoir prouvé sa convergence (et pas avant).
2. **Structure vectorielle.** L'ensemble des fonctions admettant une intégrale généralisée convergente sur I est un espace vectoriel. Dès lors :
   a) **Linéarité.** $\displaystyle\int \lambda f + \mu g = \lambda \int f + \mu \int g$. Utilisable dès que deux des trois intégrales intervenant dans la relation sont convergentes.
   b) **Positivité et croissance.** En cas de convergence des intégrales de f et g :
   $\displaystyle 0 \leq f \leq g \Rightarrow 0 \leq \int f \leq \int g$.
3. **Inégalité triangulaire.** En cas d'absolue convergence de l'intégrale de f, les termes apparaissant dans la formule ont un sens et :
$$\left|\int f\right| \leq \int |f|.$$
4. **Nullité.** Pour des intégrales de fonctions positives, mais pas forcément continues $\displaystyle\int f = 0 \Rightarrow f$ est nulle sauf peut-être en un nombre fini de points.
5. **Parité.** Si f est paire ou impaire, alors $\displaystyle S = \int_{-A}^{A} f$ et $\displaystyle T = \int_0^A f$ sont de même nature. En cas de convergence, si f est paire : $S = 2T$, sinon $S = 0$.

utile

utile pour les moments de VAR à densité de densité paire : gaussiennes notamment.

Exemple 8 : qualification déjà faite.

$\forall t \geq 1 \qquad 0 \leq f(t) \leq \dfrac{1}{t^2}$.

Comme $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (cf exo2),

thm 3 dit que $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ existe,

et donc : $\underbrace{\displaystyle\int_0^{+\infty} f \text{ aussi}}_{\text{pas demandé dans l'exo.}}$ car $\displaystyle\int_0^1 f$ est classique $\blacksquare$