

**Programme de colles**  
**Semaine 16 du 26/01 au 30/01/2026**

### Variables aléatoires réelles (VAR) discrètes

- Variable aléatoire réelle discrète sur  $(\Omega, \mathcal{T})$
- Loi de probabilité d'une VAR discrète
- Fonction de répartition : définition, croissance, limites en  $\pm\infty$
- Retrouver la loi de probabilité à partir de la fonction de répartition
- Moments d'une VAR discrète
- Espérance d'une VAR : définition, linéarité, croissance
- Théorème de transfert
- Variance d'une VAR discrète,  $\mathbf{V}(aX + b)$ ,  $\mathbf{V}(X) \geq 0$
- Formule de König-Huygens
- Écart-type, variable centrée, variable centrée réduite,  $X^*$  variable centrée réduite associée à  $X$
- Loi certaine, espérance, variance
- Loi uniforme, espérance de  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
- Loi de Bernoulli, espérance, variance
- Loi binomiale, espérance, variance
- Loi de Poisson, espérance, variance
- Loi géométrique, espérance, variance, propriété d'invariance temporelle

### Intégrales généralisées (impropres)

- Convergence d'une intégrale d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert.
- Cas d'une fonction définie sur un intervalle et continue sauf en un nombre fini de points.
- Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point.
- Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance.
- Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales improches.
- Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales improches.
- Cas des fonctions paires ou impaires.
- Théorème de comparaison de deux fonctions positives.
- Si deux fonctions positives sont équivalentes en  $b$  alors les deux intégrales, improches en  $b$ ,  $\int_a^b f$  et  $\int_a^b g$  sont de même nature.
- Convergence absolue d'une intégrale généralisée.
- La convergence absolue est une condition suffisante de convergence.
- L'intégrale de Gauss  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  converge et vaut  $\sqrt{2\pi}$ .

**Questions de cours :**

1. Formule des probabilités totales pour un système (quasi) complet d'événements lié à une VAR discrète
2. Définition de la loi de probabilité d'une VAR discrète
3. Définition du moment d'ordre  $r$  d'une VAR discrète
4. Définition de l'espérance d'une VAR discrète
5. Théorème de transfert
6. Définition de la variance et de l'écart-type d'une VAR discrète
7. Théorème de König-Huygens
8. Espérance, variance et écart-type de  $Y = aX + b$
9. Définition de la variable centrée réduite associée à une VAR discrète
10. Loi certaine, espérance et variance
11. Loi uniforme, espérance de la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$
12. Loi de Bernoulli, espérance et variance
13. Loi binomiale, espérance et variance
14. Loi de Poisson, espérance et variance
15. Loi géométrique, espérance et variance
16. Définition de la convergence d'une intégrale généralisée  $\int_a^b f$  si  $f$  est continue sur  $[a, b[$ .
17. Définition de la convergence d'une intégrale généralisée  $\int_a^{+\infty} f$  si  $f$  est continue sur  $[a, +\infty[$ .
18. Donner la relation de Chasles pour les intégrales improches.
19. Donner le théorème de comparaison pour les intégrales improches.
20. Donner le théorème de convergence d'intégrales de fonctions équivalentes.
21. Définition de l'absolue convergence et du critère de convergence d'une intégrale généralisée.
22. Théorème d'intégration par parties pour une intégrale généralisée.