

TD Devants.

105. 1- Appliquer def
2- T_{23}
+ thm central
de ce chapitre

107. T_{316} qui est la
technique essentielle
de ce ch.

$$||| \quad E(x) = \frac{p}{a} + \frac{q}{b}$$

$$V(x) = \frac{p}{a^2} + \frac{q}{b^2} + pq\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2$$

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$$

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ &= 0 + 0 + \dots \\ \boxed{S = 0} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} S &= 1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + ((-1) + \dots) \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 \\ S &= 1 \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{1 = 0}$$

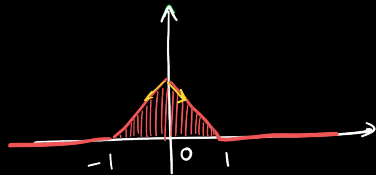
$$S = 1 - \underbrace{(1 - 1 + 1 - 1 + \dots)}_S$$

$$S = 1 - S$$

$$\begin{aligned} 2S &= 1 \\ \hline \boxed{S = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

105. 4 choses à vérifier:

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ ✓
2. f est C^0 sur $\mathbb{R}$ sauf au plus en un nb fini de points.
 f est polynomiale sur $]-\infty, -1[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$,
elle est donc C^0 sur $\mathbb{R} - \Delta$ où $\Delta = \{-1, 0, 1\}$ qui
est un ensemble fini. ✓
3. f est positive: évident. ✓
4. Convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ vers 1



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \dots + \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^{+\infty} + \dots \text{ impossible}$$

Notons que f est paire. D'après le cours:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f \text{ et } J = \int_0^{+\infty} f \text{ sont de même nature,}$$

et en cas de convergence $I = 2J$.

• Étudions J .

- $+\infty$ est une vraie impropriété.
- f est en fait continue sur $[0, 1]$: il n'y a pas d'impropriété en 0 et en 1.

Rappel: un point de continuité n'est jamais une impropriété (ours)

La seule impropriété est en $+\infty$ (car f est $C^0(\mathbb{R}_+)$).

Comme f est nulle sur $[1, +\infty[$, $\int_1^{+\infty} f$ converge et vaut 0.

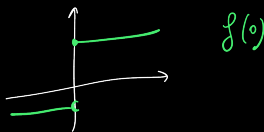
Finalement, J est convergente et $J = \int_0^1 f(t) dt$.

Calcul: $J = \text{aire du triangle}$ 

$$= \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

donc I converge et vaut 1.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x \in [0, 1] \\ -1-x & x \in [-1, 0] \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 1-x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1+x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad f(1) = 0, \quad f(0) = 1$$

$$S: x \in [-1, 0] \quad f(-x) = 1-x = f(x) \quad \text{car } x \in [0, 1]$$

2. On calcule $P(Y > t)$ pour tout réel t .

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R} \quad Y = \min(X_1, X_2)$$

$$Y > t = (X_1 > t) \cap (X_2 > t) \text{ par def de min}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } P(Y > t) &= P((X_1 > t) \cap (X_2 > t)) \\ &= P(X_1 > t) \times P(X_2 > t) \quad \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= P(X_1 \leq t) \times P(X_2 \leq t) \quad \text{Rappel: } F_X(t) = P(X \leq t) \\ &= (1 - F_{X_1}(t)) \times (1 - F_{X_2}(t)) \\ P(Y > t) &= (1 - F_X(t))^2 \quad \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi donc même fonction de répartition} \end{aligned}$$

En passant à l'inverse on a:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_Y(t) = 1 - P(Y > t) = 1 - (1 - F_X(t))^2 \quad (*)$$

On montre que Y est à densité (utile [509])

Comme X est à densité: F_X est $C^1(\mathbb{R})$ (sauf au plus en un nb fini de points)

d'après (*), F_Y est donc différence de produits de fonctions $C^1(\mathbb{R})$, elle est donc $C^1(\mathbb{R})$.

On vérifie que F_Y est $C^1(\mathbb{R})$ sauf au plus...

X est à densité donc F_X est $C^1(\mathbb{R})$ sauf au plus...
donc F_Y aussi par produit et différence.

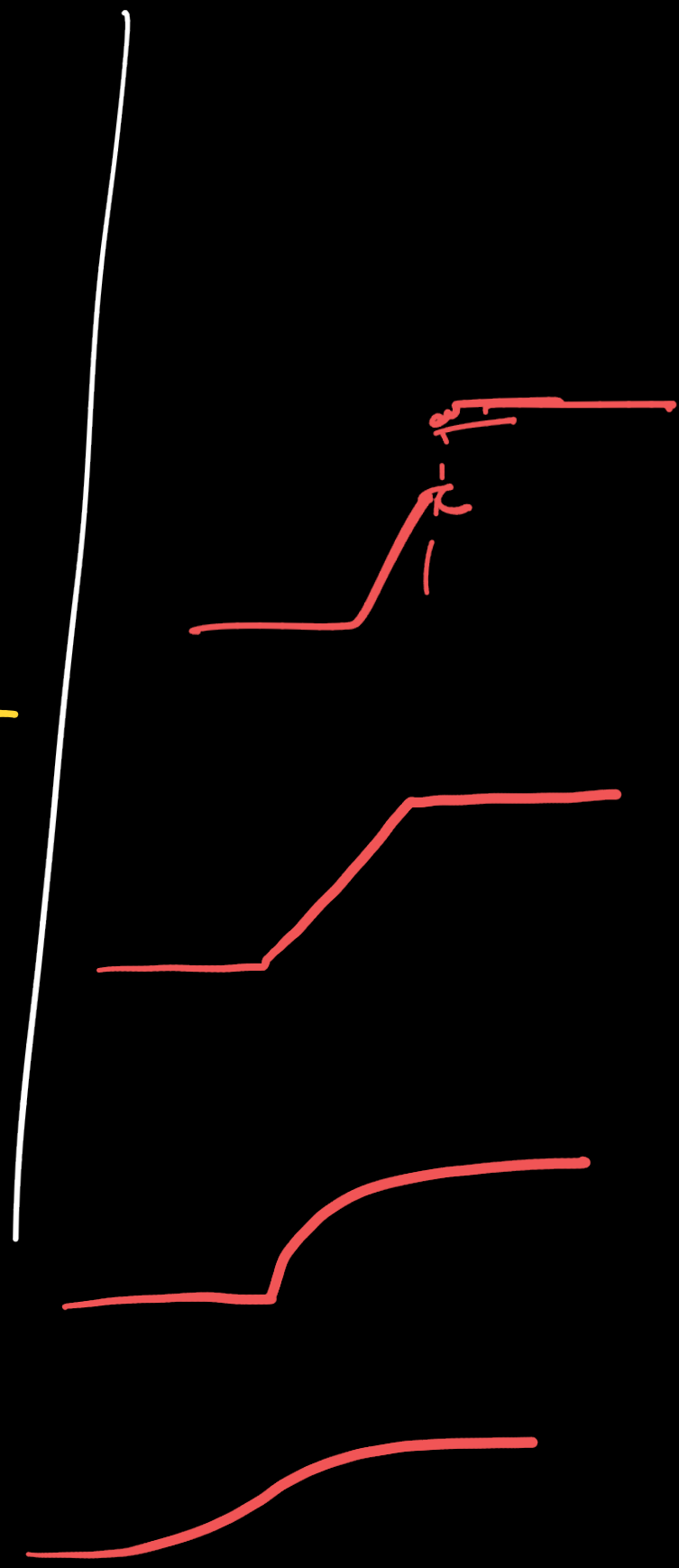
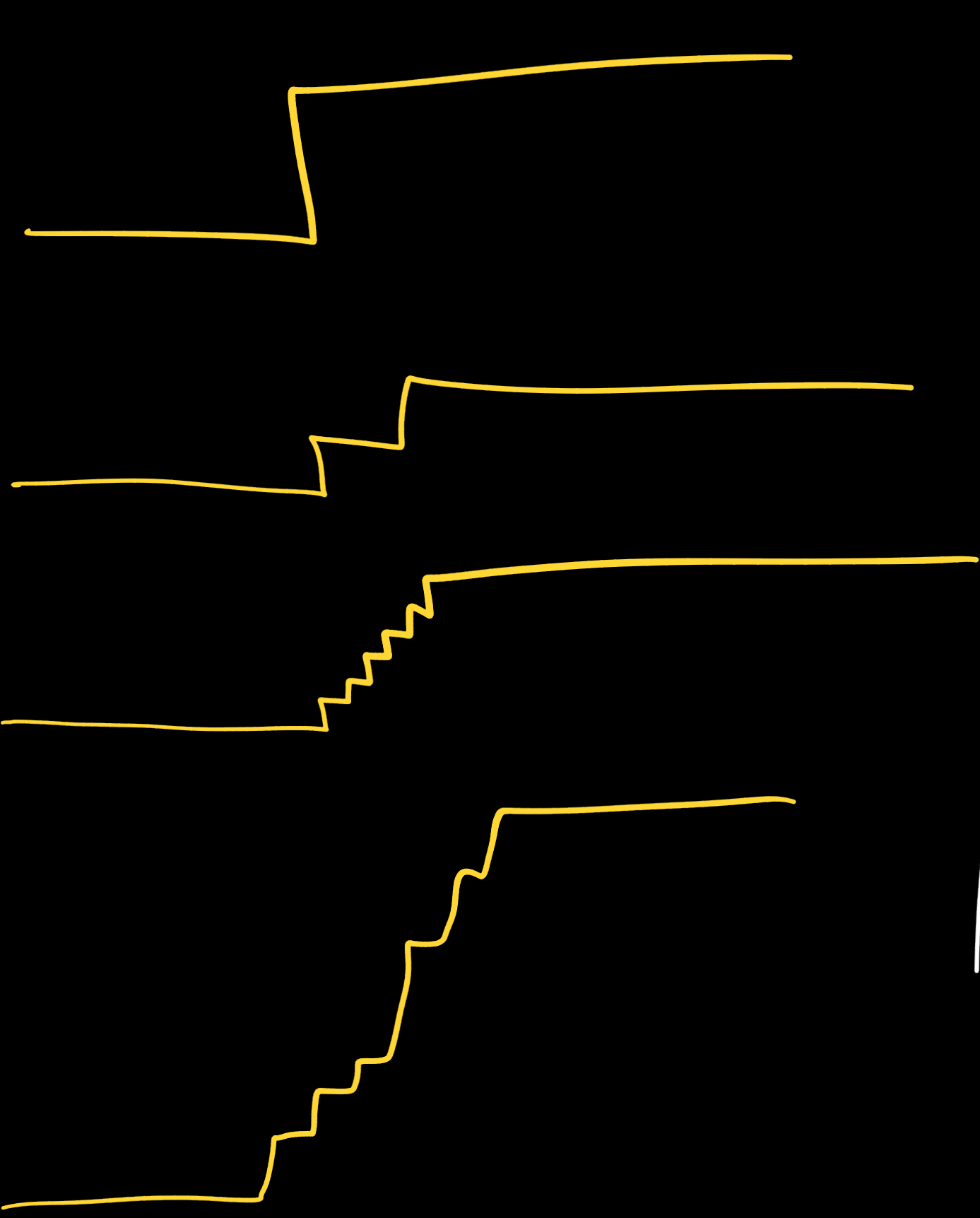
Conclusion: Y est à densité.

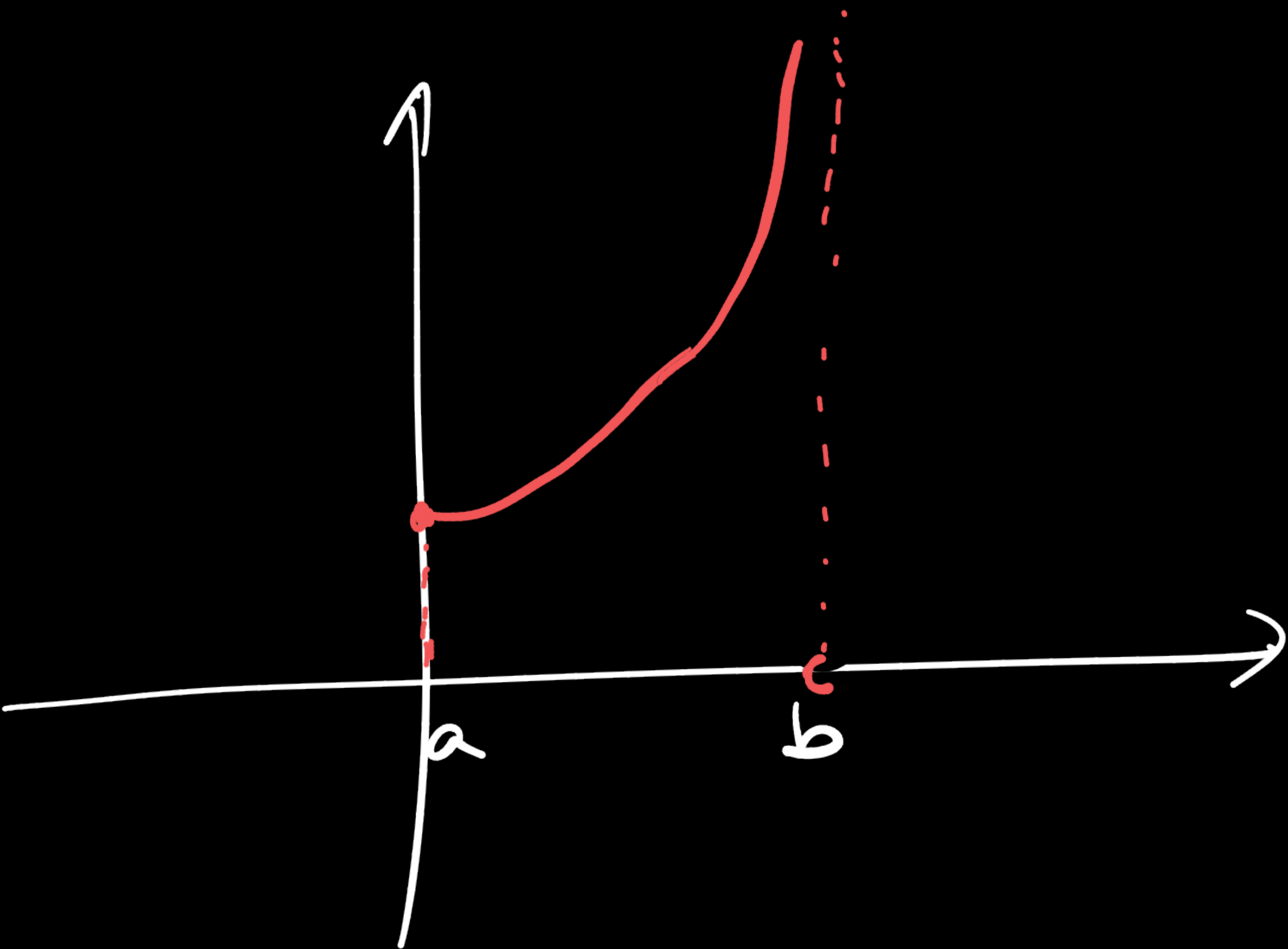
- on obtient une densité en dérivant F_Y (là où c'est possible)

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = 0 - 2(1 - F_X(t)) \times (-F_X'(t))$$

$$f_Y(t) = 2f_X(t)(1 - F_X(t))$$

(sauf peut-être en $-1, 0, 1$).





Exemple

Soit $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, et $\lambda > 0$.

T₃₁₆

$$Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X.$$

Montrer que $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$

1-a) Comme $X(\Omega) =]0,1[$ g.c. (= X prend ses valeurs dans $]0,1[$ g.c.)

$\ln X$ prend g.c. ses valeurs dans $] -\infty, 0[$

Comme $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X$ et que $\lambda > 0$,

Y prend ses valeurs g.c. dans $\mathbb{R}_+^*$

1-b)

$$Y(\Omega) =]0, +\infty[\text{ g.c. } (*)$$

a b

2

Calcul de $F_Y(t)$

2a) Si $t < 0$ $F_Y(t) = 0$ ⁽¹⁾ d'après (*)

2b) Soit $t \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} [Y \leq t] &= \left[-\frac{1}{\lambda} \ln X \leq t \right] \\ &= [\ln X \geq -\lambda t] \\ &= [X \geq e^{-\lambda t}] \end{aligned}$$

car $-\lambda < 0$

car exp est
strictement croissante
et bijective

On passe aux probas:

$$F_Y(t) = P(X \geq e^{-\lambda t})$$

$$= 1 - P(X < e^{-\lambda t}) \text{ par contraire}$$

$$= 1 - P(X \leq e^{-\lambda t}) \text{ car } X \text{ est \u00e0 densit\u00e9}$$

2c)

$$F_Y(t) = 1 - F_X(e^{-\lambda t})$$

$$= 1 - u \text{ car } u \in [0,1]$$

2d)

$$\forall t > 0 \quad F_Y(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Rappel:

$X \sim \mathcal{U}(0,1)$

$$F_X(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \geq 1 \quad \times \\ u & \text{si } u \in [0,1] \quad \checkmark \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \quad \times \end{cases}$$

3-a)

D'apr\u00e8s (1) et (2) on reconna\u00eet la fonction de r\u00e9p d'une l\u00e9 $\mathcal{E}(\lambda)$. Donc $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ d'apr\u00e8s le cours.

①
Espace
image

$X \mapsto \Sigma(\lambda)$ donc X prend q.c. ses
valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $Y = \sqrt{X}$ prend q.c. ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$

$$Y(\Omega) = \mathbb{R}_+^* \text{ q.c. } (*)$$

②
Calcul
de F_Y

Calcul de $F_Y(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

2a)

$$\text{Si } t < 0: F_Y(t) = 0 \quad (1) \text{ d'après } (*)$$

2b)

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*(\Omega)$

$$[Y \leq t] = [\sqrt{X} \leq t] \text{ par déf de } Y$$

$$= [X \leq t^2] \quad \begin{array}{l} \text{car } u \mapsto u^2 \text{ est} \\ \text{bijective et croissante} \\ \text{sur } \mathbb{R}_+ \end{array}$$

sens ne change pas

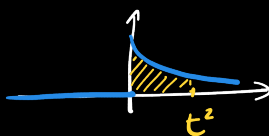
2c) En passant aux probas:

$$\forall t > 0 \quad F_Y(t) = F_X(t^2)$$

$$= \int_0^{t^2} \lambda e^{-\lambda s} ds$$

$$= \left[-e^{-\lambda s} \right]_0^{t^2} \quad (\text{primitivation à vue})$$

$$\forall t > 0 \quad F_Y(t) = 1 - e^{-\lambda t^2} \quad (2)$$



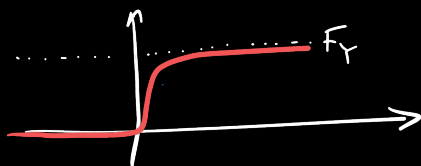
2d)

Synthèse 2a) et 2c):

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t^2} & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (3)$$

3.

3a: $\emptyset$



3b:

Vérifions que F_Y est $C^0(\mathbb{R})$

D'après (3): F_Y est $C^0(\mathbb{R}^*)$ visiblement.

$$\text{Si } t \underset{>}{\rightarrow} 0 \quad 1 - e^{-\lambda t^2} \rightarrow 0 = F_Y(0).$$

donc F_Y est continue en 0.

Conclusion F_Y est $C^0(\mathbb{R})$

• De même F_Y est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ d'après (3).

Donc [5049]:

- Y est une VAR à densité
- on obtient une densité pour Y en dérivant F_Y là où c'est possible:

$$\forall t \in \mathbb{R}^*: f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ +2\lambda t e^{-\lambda t^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Moments :

On montre que Y admet un moment d'ordre 2,
ce qui établit l'existence de $V(Y)$ et de $E(Y)$

Comme $Y = \sqrt{X}$ et que j'ai la loi de X ,
je peux utiliser la formule de transfert :

D'après le cours Y admet un moment d'ordre 2
ssi l'intégrale
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$$

Converge absolument.

Comme f_X est nulle sur $\mathbb{R}_-$, la seule inpropriété
sur $+\infty$ et on étudie
$$I = \int_0^{+\infty} t |f_X(t)| dt$$

Comme $t \in [0, +\infty[$, on peut omettre les valeurs abs.

On reconnaît alors en I l'espérance de la loi
 $\mathcal{E}(\lambda)$, qui existe.

Conclusion I converge et $I = E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Calcul de $E(Y)$: je sais qu'elle existe donc
je peux la manipuler dans les calculs.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{+\infty} y \cdot 2\lambda y e^{-\lambda y^2} dy \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \lambda y^2 e^{-\lambda y^2} dy \\ E(Y) &\stackrel{\text{parité}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda y^2 e^{-\lambda y^2} dy \end{aligned}$$

$$\text{Notons } \frac{1}{2\sigma^2} = \lambda$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } E(Y) &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \lambda \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy}_{\text{je reconnais la variance de la loi } \mathcal{N}(0, \sigma^2)} \end{aligned}$$

$$E(Y) = \lambda \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2} \times \sigma^2$$

$$E(Y) \stackrel{\sigma^2 = \frac{1}{2\lambda}}{=} \lambda \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{2\lambda}} \times \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Avec la formule de König - Huygens :

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{4} \frac{\pi}{\lambda} = \frac{4 - \pi}{4\lambda} \geq 0. \end{aligned}$$