Planches de Khôlles

Algèbre générale

1 Équation complexe non polynomiale

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère l'équation :

$$(E) \qquad z^6 = \bar{z}$$

1. Montrer que toute solution non nulle est de module 1.
2. Justifier que l'on peut chercher les solutions de (E) sous la forme $z = e^{i\theta}$ et que l'on peut supposer que $\theta \in [0, 2\pi[$.
3. Donner ensuite toutes les solutions de (E).
4. Montrer que la somme des solutions de (E) est nulle.
5. En déduire que $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.
6. Sous **`Python`**, on souhaite implémenter le produit de deux nombres complexes. Pour cela, on représente le nombre complexe $z = a + ib$ (où a, b sont des réels) par un tuple de flottants `(a,b)`.
   a) Programmer une fonction `prod(z1,z2)` prenant en entrée deux tuples de flottants `z1`,`z2` et renvoyant en sortie le tuple représentant le complexe `z1z2`.
   b) Représenter graphiquement les solutions de l'équation (E) dans le plan complexe.

2 Équation d'inconnue complexe

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, et pour tout nombre complexe non nul z, on pose :

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z}.$$

1. Montrer que :
   a) $\forall z \in \mathbf{C}^\star \quad f(z) \in \mathbf{U}$.
   b) $\forall u \in \mathbf{U} \quad \exists z \in \mathbf{C}^\star \quad f(z) = u$
2. À quelle condition sur z le nombre $f(z)$ est-il réel ?
3. On considère l'équation suivante : $(E) \quad f(z) = z + 1$
   a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $z^2 = -2i\,\mathfrak{Im}(z)$.
   b) Sout z un complexe non nul. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que z^2 soit imaginaire pur.
   c) Résoudre l'équation (E).

3 Somme de sinus et de cosinus

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Pour tout réel x, on pose :

$$S(x) = \sin x + \sin(2x) + \sin(3x) \quad \text{et} \quad C(x) = \cos x + \cos(2x) + \cos(3x).$$

1. Exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$ et $\sin^3 x$, et $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\cos^3 x$. On pourra chercher à mettre de deux façons différentes le nombre e^{3ix} sous forme algébrique.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R} \quad S(x) = 2\cos x \sin x\,(1 + 2\cos x)$.
3. En déduire les solutions réelles de l'équation $S(x) = 0$.
4. En procédant de la même manière, résoudre l'équation $C(x) = 0$.
5. Donner les solutions du système $\begin{cases} S(x) &= 0 \\ C(x) &= 0 \end{cases}$
6. Résoudre dans C l'équation $z + z^2 + z^3 = 0$.
7. Retrouver les solutions du système précédent.

4 Forme exponentielle d'un quotient de complexes à paramètre

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $a \in]0, \pi[$, $u = 1 + \cos a + i \sin a$, $v = \sqrt{1 + \sin 2a} + i\sqrt{1 - \sin 2a}$ et

$$z = \frac{u}{v} = \frac{1 + \cos a + i \sin a}{\sqrt{1 + \sin 2a} + i\sqrt{1 - \sin 2a}}.$$

1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Donner la forme exponentielle de $\lambda e^{i\theta}$.
2. Donner la forme exponentielle de u.
3. Trouver deux réels R et φ tels que :

$$\cos a + \sin a = R\cos(a - \varphi) \quad \text{et} \quad \sin a - \cos a = R\sin(a - \varphi).$$

4. Tracer les courbes des fonctions $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ et $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ sur l'intervalle $I =]0; \pi[$.
5. En déduire graphiquement les sous ensembles suivants :

$$I_1 = \left\{x \in I \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0\right\} \quad \text{et} \quad I_2 = \left\{x \in I \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0\right\}.$$

6. En déduire la forme exponentielle de v.
7. En déduire la forme exponentielle de z.

5 Inéquation d'inconnue complexe

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On cherche les nombres complexes pour lesquels l'inégalité suivante :

$$(D) \qquad \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) < \frac{1}{2}$$

est vérifié.

1. Justifier qu'on peut chercher les solutions de (D) dans $\mathbf{C}^\star$
2. Sous **Python**, on décide d'implémenter un nombre complexe `z` non nul par un tuple de flottants `(r,phi)` tel que $z = re^{i\varphi}$ en est une représenation exponentielle.
   a) Écrire une fonction `Re(z)` prenant en entrée un tuple de flottants `z=(r,phi)` représentant le complexe $z = re^{i\varphi}$, et renvoyant en sortie la partie réelle de z.
   b) Écrire une fonction `verifieD(z)` prenant en entrée un tuple de flottants `z=(r,phi)` représentant le complexe $z = re^{i\varphi}$, et renvoyant en sortie le booléen `True` si z vérifie (D) et `False` sinon.
   c) Soit $z \neq 0$ un complexe non nul. Vérifiez informatiquement pour différentes valeurs de z de votre choix, que z vérfie (D) si et seulement si tous les nombres de même module que z vérifient (D).
   d) En déduire informatiquement à 10^{-1} près une valeur de r telle que
   $$z \text{ vérifie } (D) \Leftrightarrow |z| > r$$
3. Exprimer $|1-z|^2$ en fonction de $|z|$, et de $\mathfrak{Re}(z)$.
4. Montrer que
   $$z \text{ vérifie } (D) \Leftrightarrow |z| > 1$$
   (on pourra commencer par exprimer la forme algébrique de $\dfrac{1}{1-z}$ en fonction de $\mathfrak{Re}(z)$, $|z|$ et $\bar{z}$

6 Réalité des coefficients d'un polynôme

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère le polynôme P de $\mathbf{C}[X]$ donné par :

$$P_n = \frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{i}{n}X\right)^n - \left(1-\frac{i}{n}X\right)^n\right].$$

1. Calculer P_1, P_2. .
2. Expliciter le monôme de degré n de P_n en fonction de n.
3. Fixons $n \in \mathbf{N}$ et notons pour tout entier k, a_k le coefficient de X^k dans P_n, et notons Q le polynôme dont les coefficients sont les $\overline{a_k}$.
   a) Montrer que si $x \in \mathbf{R}$, alors $P_n(x) \in \mathbf{R}$.
   b) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R} \quad P_n(x) = Q(x)$.
   c) En déduire que les coefficients de P sont réels.
4. Sous **Python**, on décide de représenter un polynôme P par la liste ordonnée de ses coefficients par degrés croissants, si bien que si `LP` est la liste représentant P, `LP[k]` donne le coefficient du monôme de degré k dans P.
   a) Écrire une fonction `deg(LP)` prenant en entrée une liste `LP` de flottants représentant un polynôme P et renvoyant en sortie le degré de P.
   b) Écrire une fonction `is_positive(LP)` prenant en entrée une liste `LP` de flottants représentant un polynôme P et renvoyant en sortie le booléen `True` si tous les coefficients de P sont positifs ou nuls, et `False` sinon.

7 Factorisation d'un polynôme

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1. Montrer que 0 est racine de P. Déterminer sa multiplicité.
2. Soit $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$.
   a) Calculer j^3.
   b) Fabriquer une équation du second degré à coefficients **réels** dont j est racine.
   c) En déduire un calcul simple de $P(j)$, et trouver une racine non réelle de P dont on calculera la multiplicité.
3. Finir de factoriser P sur $\mathbf{C}$.
4. Sous `Python`, on décide de représenter un polynôme P de degré au plus 7 par la liste `LP` de flottants telle que `LP[k]` est le coefficient de X^k dans P.
   a) Programmer une fonction `deg(LP)` prenant en entrée une liste `LP` de flottants représentant un polynôme P de degré au plus 7 et renvoyant en sortie le degré de P.
   b) Programmer une fonction `somme(LP,LQ)` prenant en entrée deux listes de flottants `LP`,`LQ` et renvoyant en sortie la liste représentant le polynôme $P+Q$.

8 Factorisation d'un polynôme quartique à partir d'un produit de trinômes

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

1. Soit α, β deux réels et $Q = X^2 + \alpha X + \beta$.

a) Justifier sans calculs que Q possède deux racines dans $\mathbf{C}$, notées z_1, z_2.

b) Donner une relation simple entre z_1, z_2 et α.

2. Soit maintenant λ un réel et

$$P = X^4 - 6X^3 + 8X^2 - \lambda X - 30.$$

a) Justifier que P possède 4 racines dans $\mathbf{C}$.

b) Déterminer, en utilisant les résultats de **1.**, la valeur de λ telle que la somme de deux racines de P soit égale à la somme des deux autres.

3. Pour cette valeur de λ, factoriser P.

4. Sous **Python**, on décide de représenter un polynôme P par la liste de ses coefficients ordonnée par degrés croissants, si bien que si `LP` est la liste représentant P, `LP[k]` donne le coefficient de degré k dans P.

Écrire une fonction `deg(LP)` prenant en entrée une liste `LP` de flottants représentant un polynôme P et renvoyant en sortie le degré de P.

9 Suite de polynômes

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$(S)\left\{\begin{array}{rrl} & P_0 = & 1 \\ \forall n \in \mathbf{N} & P_{n+1} = & (1-X)^{n+1} + (n+1)P_n \end{array}\right.$$

1. Calculer P_1, P_2.
2. Déterminer pour tout entier $n \geq 1$ le terme dominant de P_n.
3. Le but de cette question est de prouver que les racines de P_n sont simples.
   a) Montrer que : $\forall n \in N^\star \quad P_n(1) = n!$
   b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in N^\star \quad P_n' = -nP_{n-1}$.
   c) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Supposons que $a \in \mathbf{C}$ soit une racine multiple de P_n. Montrer que a ne peut être égal qu'à 1.
   d) Conclure.
4. Soit $Q = a_pX^p + \cdots + a_0$ un polynôme. Soit $r \in \mathbf{N}, r \leq p$. Que vaut $Q^{(r)}(0)$? En déduire une expression des coefficients a_k de Q en termes de ses dérivées en 0.
5. Le but de cette question est d'obtenir un développement de P_n.
   Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, et $k \leq n$ un entier.
   a) Trouver une relation entre $P_n^{(k)}$ et P_{n-k}.
   b) En déduire que $P_n^{(k)}(1) = (-1)^k n!$
   c) Déduire les coefficients de $Q_n = P_n(X+1)$ (on pourra commencer par remarquer une relation simple entre les dérivées successives de P_n et de Q_n)

Analyse

10 Étude locale de fonction (1)

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f noté D dans la suite.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en $x = 0$. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
4. Conjecturer la dérivabilité de f en $x = 0$ à l'aide de calculs en `Python` (on pourra calculer le taux d'accroissement de pas `h` pour des valeurs de plus en plus petites de `h`).
5. Prouver la conjecture établie précédemment.
6. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $x = 0$?

11 Étude loacle de fonction (2)

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f noté D dans la suite.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en $x = 0$. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
4. Conjecturer la dérivabilité de f en $x = 0$ à l'aide de calculs en `Python` (on pourra calculer le taux d'accroissement de pas h pour des valeurs de plus en plus petites de h).
5. Prouver la conjecture établie à la question précédente.
6. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $x = 0$?

12 Étude locale de fonction (3)

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{2(1-x)}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{2}}} - 1 \right) & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{array} \right.$$

1. Justifier que f est continue sur $[0, 1[$.
2. Montrer que f est continue en $x = 1$.
3. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1[$.
4. Calculer un développement limité de f à l'ordre 1 en $x = 1$.
5. Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1[$.
6. Conjecturer la dérivabilité de f en $x = 1$ à l'aide de calculs en `Python` (on pourra calculer le taux d'accroissement de pas h pour des valeurs de plus en plus petites de h).
7. La fonction f est-elle dérivable en $x = 1$?
8. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $x = 1$?

13 Étude locale de fonction (4)

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (x - 1)^2 \ln(x - 1).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f noté D dans la suite.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en $x = 1$. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
4. Conjecturer la dérivabilité de f en $x = 1$ à l'aide de calculs en `Python` (on pourra calculer le taux d'accroissement de pas `h` pour des valeurs de plus en plus petites de `h`).
5. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $x = 1$?

14 Étude locale de fonction (5)

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f noté D dans la suite.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en $x = 0$. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
4. Conjecturer la dérivabilité de f en $x = 0$ à l'aide de calculs en `Python` (on pourra calculer le taux d'accroissement de pas `h`
5. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $x = 0$?

15 Étude locale de fonction (6)

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la fonction f définie sur $D =]-1,1[\setminus\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction sinus et calculer le développement limité en 0 de la fonction $\sin^2$ à l'ordre 3.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en $x = 0$. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
3. Justifier que f est dérivable sur D.
4. Conjecturer la dérivabilité de f en $x = 0$ à l'aide de calculs en `Python` (on pourra calculer le taux d'accroissement de pas `h` pour des valeurs de plus en plus petites de `h`)
5. Montrer que f est dérivable en $x = 0$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

16 Étude locale de fonction (7)

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la fonction f définie sur $D =]-1, 1[\setminus\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en $x = 0$. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Justifier que f est dérivable sur D.
3. Conjecturer à l'aide de `Python` la dérivabilité de f en $x = 0$ (on pourra considérer le taux d'accroissement de pas `h` et prendre ce dernier de plus en plus petit).
4. Montrer que f est dérivable en $x = 0$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

17 Étude locale de fonction (8)

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\arctan x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f noté D dans la suite.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
3. Calculer un développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$ de la fonction $\arctan$.
4. Montrer que f est prolongeable par continuité en $x = 0$. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
5. Conjecturer la dérivabilité de f en $x = 0$ à l'aide de calculs en `Python` (on pourra calculer le taux d'accroissement de pas `h` pour des valeurs de plus en plus petites de `h`)
6. La fonction f est-elle dérivable en $x = 0$?
7. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $x = 0$?

18 Étude locale de fonction (9)

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{x}{\arctan x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f noté D dans la suite.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
3. Rappeler la fonction dérivée de la fonction Arc-tangente.
4. Calculer un développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$ de la fonction arctan .
5. Montrer que f est prolongeable par continuité en $x = 0$. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
6. À l'aide de `Python`, émettre une conjecture quant à la dérivabilité de la fonction f en $x = 0$
7. Prouver la conjecture émise à la question précédente.
8. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $x = 0$?

19 Étude d'une fonction définie par une intégrale et DL(0)

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit x un réel. On pose

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Écrire une fonction **python** prenant en entrée un flottant x et renvoyant en sortie une valeur approchée de $\Phi(x)$ obtenue par une somme de Riemann.
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction Φ.
3. Étudier la parité de Φ.
4. Étudier la dérivabilité de Φ et donner l'expression de $\Phi'(x)$ aux points x de dérivabilité de Φ.
5. Donner un développement limité de Φ à l'ordre 3 en 0.
6. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln 2$.

20 Équation différentielle vérifiée par une fonction intégrale

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $k > 0$ un entier. On pose pour tout réel $x > 0$:

$$F_k(x) = \int_0^1 t^k \sin(tx)\mathrm{d}t.$$

1. Écrire une fonction **python** prenant en entrée un flottant x, un entier k et renvoyant en sortie une valeur approchée de $F_k(x)$ obtenue par une somme de Riemann.
2. Montrer que $\forall x > 0,\ F_k(x) = x^{-(1+k)} \displaystyle\int_0^x u^k \sin(u)\,\mathrm{d}u$.
3. Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et donner une équation différentielle du premier ordre non homogène vérifiée par F_k.
4. Donner un équivalent de $F_k(x)$ au voisinage de $x = 0$.

21 Convergence d'une suite d'intégrales

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \geq 0$ un entier. On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_2 (on pourra poser $u = 1 + t$).
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.
3. Soit $k \geq 0$. Calculer $I_k + I_{k+1}$
4. En déduire une expression de $Sn = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ en fonction de I_n.
5. Écrire une fonction **Python** prenant en entrée un entier `n` et renvoyant en sortie la valeur numérique de S_n, et de I_n.

22 Suite définie par une intégrale et équivalent

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \geq 0$ un entier. On pose :

$$I_n = \int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 0$.
2. Étudier la monotonie de la suite (I_n).
3. Prouver la convergence de (I_n) et calculer sa limite. *Indication : pour le calcul de la limite, on pourra utiliser que $e^{-t} \leq 1$ pour t positif).*
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad I_n = \dfrac{1}{e(n+1)} + \dfrac{I_{n+1}}{n+1}$
5. Déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq I_n - \dfrac{1}{e(n+1)} \leq \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$
6. Donner un équivalent de I_n.
7. Écrire une fonction en **Python** prenant en entrée un entier `n` et donnant en sortie la valeur numérique de I_n

23 Suites d'intégrales

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $x \in [-1, 1]$.
Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n(x) = \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t, \quad J_n(x) = \int_0^x \frac{1-(-1)^{n+1}\,t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } J(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

1. Déterminer $J(x)$.
2. Soit k un entier naturel. Calculer $I_k(x)$.
3. Montrer que $J_n(x)$ est bien définie pour tout n de $\mathbf{N}$ puis que $J_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.
4. Écrire une fonction Python $J(n, x)$, qui prend en arguments un réel x de $[-1, 1]$ et un entier naturel n, qui renvoie la valeur de $J_n(x)$.
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [-1, 1], |J(x) - J_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$.
6. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n(x)$ pour tout x de $[-1, 1]$.
7. Écrire une fonction Python $J(x)$ qui prend en argument un réel x de $[-1, 1]$ et retourne la valeur de $J(x)$ à 10^{-4} près.
8. Ce résultat reste-t-il valable pour $x \notin [-1, 1]$?

24 Étude d'une primitive

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la fonction F définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{1/t}\mathrm{d}t$.

1. Etudier la dérivabilité de F ainsi que ses variations.
2. **a)** Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^\star \quad x - 1 \leq F(x) \leq e(x-1)$.

   b) Que peut-on dire du comportement en $+\infty$ de $\dfrac{F(x)}{x}$?

   c) Programmer sous `Python` la fonction F. On pourra utiliser pour cela la méthode des rectangles (c'est-à-dire une somme de Riemann), en passant en paramètres de la fonction la variable `x` ainsi que le pas `h` de la méthode.

   d) Précisez alors votre observation informatiquement.
3. Montrer à l'aide d'un changement de variables que $F(x) = \displaystyle\int_{1/x}^1 \frac{e^u}{u^2}\mathrm{d}u$.
4. Montrer grâce à une intégration par parties que $F(x) = xe^{1/x} - e + R(x)$, où R est une fonction que l'on précisera. Vérifier que $R(x) = o(x)$ au voisinage de l'infini. En déduire un équivalent de F en $+\infty$.
5. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{k/n}}{k(k+1)}$.

   a) Calculer S_n avec Python. Faites une conjecture sur la limite. La démontrer.

   b) Modifier le script pour vérifier que $S_n - 1$ est de l'ordre de $\dfrac{1}{n}$.

25 Fonction définie par une intégrale et encadrement

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit Φ la fonction définie par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t + \sin t}.$$

1. Écrire une fonction **python** prenant en entrée un flottant x et renvoyant en sortie une valeur approchée de $\Phi(x)$ obtenue par une somme de Riemann.
2. Déterminer le domaine de définition D de Φ.
3. Montrer que Φ est une fonction paire.
4. Montrer que $\Phi \in C^1(D)$.
5. Calculer $\Phi'(x)$ pour tout réel x dans D.
6. À l'aide du théorème des gendarmes, étudier $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x)$.

26 Fonction définie par une intégrale et changements de variables

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \geq 0$ un entier. On pose :

$$a = \frac{e + e^{-1}}{2}, \quad b_n = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \quad \text{et} \quad I_n = \int_a^{b_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

1. a) Proposer une fonction **Python** prenant en entrée un entier `n` et renvoyant en sortie une valeur approchée de I_n.

b) Utiliser la fonction proposée pour donner la liste des valeurs de I_n pour $n = 1, 2, \dots 1000$, et conjecturer un équivalent de I_n.

2. Montrer que : $\forall x \geq 2$, $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \leq \dfrac{1}{x - 1}$.

3. Déduire un équivalent de I_n quand $n \to +\infty$.

4. a) Utiliser que $\dfrac{1}{s^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s - 1} - \dfrac{1}{s + 1}\right)$ pour calculer une primitive de $s \mapsto \dfrac{1}{s^2 - 1}$ sur $]1, +\infty[$.

b) Calculer I_n (on pourra poser $t = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$, puis $s = e^u$ dans l'intégrale obtenue).

5. Vérifier la cohérence du calcul en comparant avec le résultat de la question **3**.

27 Moyennes arithmétique et géométrique de réels de $[0, 1]$

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \in \mathbf{N}$.

On considère un n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ tel que pour tout i, $0 < x_i \leqslant \frac{1}{2}$ et on note : $x_i' = 1 - x_i$.

On définit les moyennes arithmétiques : $A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $A_n' = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k'$,

et les moyennes géométriques : $G_n = \prod_{k=1}^{n} x_k^{1/n}$ et $G_n' = \prod_{k=1}^{n} {x_k'}^{1/n}$.

Le but de l'exercice est l'étude des quotients $q_n = \frac{G_n}{A_n}$ et $q_n' = \frac{G_n'}{A_n'}$.

1. **a)** Écrire une fonction `Python` qui prend en argument deux listes de même longueur `L` et `L'` (contenant les n-uplets $x_1, \cdots, x_n$ et $x_1', \cdots, x_n'$) et qui renvoie les quotients $\frac{G_n}{A_n}$ et $\frac{G_n'}{A_n'}$.

b) Tester la fonction pour `n=4` et la liste `L=[0.25,0.27,0.3,0.4]`.

c) Écrire une fonction prenant un entier `n` et qui renvoie en sortie une liste de longueur `n` de flottants dans $[0, 1/2]$ tirés de manière aléatoire et mutuellement indépendante.

d) Avec un grand nombre d'essais, que peut on conjecturer comme inégalité sur les quotients q_n et q_n' ?

2. Dans cette question, on fixe $n = 2$.

a) Démontrer que $A_2' = 1 - A_2$, $G_2' = \sqrt{1 - 2A_2 + G_2^2}$ et que $G_2 < A_2 < \frac{1}{2}$.

b) Déterminer le signe de $G_2^2 {A_2'}^2 - {G_2'}^2 A_2^2$.

Conclure pour le cas $n = 2$.

3. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ telle que : $\forall t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $f''(t) > 0$.

a) Soit $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$.

Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \quad f(x) \geqslant f'(a)(x - a) + f(a)$ avec égalité si et seulement si $x = a$.

b) En déduire, avec des choix judicieux de x et de a, que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) > f(A_n)$.

4. On pose, pour $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$: $f(t) = \ln \frac{1-t}{t}$.

a) Vérifier que la fonction f remplit les hypothèses de la question **3.**

b) En déduire une inégalité entre les x_k, x'_k et A_n.

5. Que peut-on en déduire quant à q_n et q'_n ?

6. Étudier le cas d'égalité des quotients q_n et q'_n.

28 Équation différentielle linéaire et solution particulière sous forme intégrale

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

1. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^\star$ .Résoudre sur $\mathbf{R}_+^\star$ l'équation :

$$y' + \frac{\alpha}{x} y = 0$$

2. Soit $k > 0$ un entier. On pose pour tout réel $x > 0$:

$$F_k(x) = \int_0^1 t^k \sin(tx) \mathrm{d}t.$$

   a) Écrire une fonction **python** prenant en entrée un flottant x, un entier k et renvoyant en sortie une valeur approchée de $F_k(x)$ obtenue par une somme de Riemann.
   b) Montrer que $\forall x > 0$, $F_k(x) = x^{-(1+k)} \int_0^x u^k \sin(u)\, \mathrm{d}u$.
   c) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et donner une équation différentielle du premier ordre non homogène vérifiée par F_k.

3. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbf{R}_+^\star$: $xz' + 2z = \sin x$.

29 Équation d'ordre 1 linéaire à coefficients non dérivables

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On souhaite résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbf{R}_+^\star$:

$$(E) \qquad xf' - |1-f| = 1$$

1. Résoudre sur $\mathbf{R}_+^\star$ l'équation $(E_-) xy' - y = 0$.
2. Résoudre sur $\mathbf{R}_+^\star$ l'équation $(E_+) xz' + z = 2$.
3. Représenter sous Python sur une même graphique la la solution de (E_i) pour $i \in \{+,-\}$ vérifiant la condition initiale $y(2) = z(2) = 1$.

On suppose maintenant qu'il existe une solution f à (E).

4. Montrer que f est strictement croissante sur sur $\mathbf{R}_+^\star$.
5. Montrer que si f est minorée par 1, elle est nécessairement solution de (E_-).
6. En examinant la limite en 0 de f, déduire que f ne peut être minorée par 1.
7. Montrer que si f est majorée par 1, elle est nécessairement solution de (E_+).
8. En examinant la limite en $+\infty$ de f, déduire que f ne peut être majorée par 1.
9. Montrer que f prend une seule fois la valeur 1, en un réel noté a.
10. Établir l'expression de f sur $]0,a]$ et sur $[a,+\infty[$.
11. Résoudre enfin l'équation (E).

30 Équation non linéaire autonome d'ordre 1

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbf{R}$:

$$(E) \quad y' \times y + y^2 = x^2$$

1. Montrer que si f est une solution, alors $-f$ aussi.
2. Montrer que si une solution de (E) s'annule en un point, ce ne peut être qu'en $x = 0$.
3. Soit f une solution de (E)
   - **a)** Trouver une équation différentielle linéaire (E') vérfiée par f^2.
   - **b)** Résoudre (E').
   - **c)** Déterminer les solutions positives de (E') sur $\mathbf{R}$. On pourra procéder soit par variation de la constante, soit chercher une solution particulière trinôme.
4. **a)** En déduire que f^2 est de la forme $x \mapsto Ce^{-2x} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ et montrer que $C \geq 0$.
   - **b)** Montrer que f est de signe constant sur $\mathbf{R}$.
5. Montrer que les solutions trouvées en 4. sont solutions de (E).
6. Conclure.

31 Équation différentielle linéaire d'ordre 1 non résolue en y'

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On souhaite résoudre sur $\mathbf{R}_+^\star$ l'équation $(E)\quad x(x-1)y' - y = x(x-1)^2$.

1. Rappeler la définition de « solution sur $\mathbf{R}_+^\star$ de (E) ».
2. Les théorèmes connus s'appliquent-ils sur $\mathbf{R}_+^\star$?
3. Résoudre sur $I_1 =]1, +\infty[$ puis sur $I_0 =]0; 1[$. On pourra remarquer que $\dfrac{1}{t(t-1)} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t}$
4. Soit y une solution sur $\mathbf{R}_+^\star$.
   a) Que vaut-elle sur $]0, 1[$? sur $]1; +\infty[$.
   b) Existe-t-il des solutions sur $\mathbf{R}_+^\star$?
5. Conclure.

32 Diagonalisation et calcul appcoché du spectre d'une famille à un paramètre de matrices

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit (a, b, c) trois réels.

On considère la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question on suppose que $a = b = 0$ et $c = 1$. A est-elle diagonalisable ?
2. Dans cette question on suppose que l'on a : $0 < a < b < c$. Soit alors la fonction f donnée par :

$$f : \mathbf{R} - \{-a, -b, -c\} \to \mathbf{R},\ t \mapsto \frac{a}{a+t} + \frac{b}{b+t} + \frac{c}{c+t}.$$

   a) Étudier les variations de f.
   b) Justifier que l'équation $f(t) = 1$ admet trois solutions réelles distinctes.
   c) Ecrire une fonction Python `dicho1` d'arguments `alpha` ,`beta`, `f` ,`eps` qui renvoie par dichotomie une valeur approchée au flottant `eps` près de l'unique solution de l'éqaution $f(t) = 1$ sur $[\alpha, \beta]$.
   d) Expliquer l'algorithme suivant : Code Python ▼

```python
def dicho2(a,f,eps):
    h = 1
    while f(a+h) >1 :
            h = 2*h
    return dicho1(a,a+h,f,eps)
```

3. a) Soit $t \in \mathbf{R}$. Montrer que le vecteur $u_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+t} \\ \frac{1}{b+t} \\ \frac{1}{c+t} \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre t si et seulement si $f(t) = 1$.
   b) A est-elle diagonalisable ?
   c) Écrire un script qui à partir de `dicho1` et `dicho2` détermine les valeurs propres de A.

33 Suite récurrente et 2-cycle

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = 1 - u_n^2. \end{cases}$$

1. **a)** Programmer une fonction en **python** `termes(n)` prenant en entier un entier n et renvoyant en sortie la liste des termes `[u0,...,un]` de la suite (u_n).
   b) Tracer les termes de la suites et conjecturer son comportement asymptotique.
   c) Écrire une fonction prenant en entrée un entier n et renvoyant en sortie les listes `[u0,u2,...,u2n]` et `[u1,...,u2n+1]`.
2. Soit $f : x \mapsto 1 - x^2$.
   a) Montrer que :
   $$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) \in [0, 1].$$
   b) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   c) Montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout entier n.
   d) On suppose que (u_n) converge vers un réel ℓ. Quelles sont les valeurs possibles de ℓ ?
3. **a)** **i)** Montrer que la fonction $f_2 = f \circ f$ est croissante sur $[0, 1]$.
   ii) Calculer u_1, u_2, u_3.
   b) En déduire la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
   c) Conclure sur la nature de la suite (u_n).

34 Suite récurrente non autonome

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_1 \in]0;\pi[$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a : $u_{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 3 : 0 < u_n < \dfrac{\pi}{2}$
2. Déterminer le seul réel vers lequel la suite (u_n) peut converger.
3. Représenter graphiquement sous **Python** u_n en fonction de n pour différentes valeurs de u_1, puis émettre à partir de vos observations une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n).
4. Montrer que s'il existe un entier $n_0 \geq 4$ tel que $u_{n_0} \leq u_{n_0-1}$, alors la suite décroît à partir du rang n_0. On pourra pour cela, utiliser une expression de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de u_n et u_{n-1}.
5. Est-il possible que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n > u_{n-1}$?
6. Conclure en établissant la convergence de (u_n).
7. Émettre, à partir d'essais numériques sur machine, une conjecture sur la limite de $\sqrt{n}u_n$.
8. En posant pour $n \geq 1$, $x_n = \dfrac{u_n}{n}$,

   montrer que : $(x_{n+1} - x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{-n^2}{6}x_n^3$, puis que $\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{3}$.
9. En admettant que le résultat précédent permet d'établir la relation suivante : $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{3}$, vérifier la conjecture faite à la question 7.

35 Suite récurrente et arctangente

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On définit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \text{ et } v_n = \sum_{k=n}^{2n} \arctan^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$$

1. Représenter les suites e^{u_n} et e^{v_n} sur Python pour n dans $\{1 \dots 50\}$.
On rappelle que la fonction `atan` figure dans le module `math`.
Quelles conjectures peut-on faire ?

2. **a)** Montrer que : $\forall k \geqslant 1,\ \dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$.

b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\arctan x \leqslant x$.
En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant v_n$.

4. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que : $\forall k \geqslant 1,\ \arctan \dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{\sqrt{k}}{1+k}$.

En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \dfrac{2k+1}{(k+1)^2}$.

5. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \dfrac{C}{n}$.

6. En déduire la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

36 Suites des paramètres d'une famille de fonctions

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On se place sur $I = [0, 1]$, on définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in N}$ par :

$f_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N} \quad f_{n+1}(x) = 2\displaystyle\int_0^x \sqrt{f_n(t)}dt$

1. Déterminer pour x dans I l'expression de $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists(a_n, b_n) \in \mathbf{R}_+^2 \;\; \forall x \in I \;\; f_n(x) = a_n x^{b_n}$.
   On vérifiera que $a_{n+1} = \dfrac{4\sqrt{a_n}}{b_n + 2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + 1$
3. Écrire une fonction python *suites* d'argument n qui calcule et renvoie en sortie les listes des $n+1$ premiers termes des suites (a_n) et (b_n) précédentes.
   Faites une conjecture sur leur limite respective.
4. Déterminer b_n en fonction de n en déduire sa limite.
5. Montrer $\forall n \in \mathbf{N} \;\; a_n \geq 1$.
6. On pose $w_n = 2^n \ln(a_n)$. Montrer que $\lim(w_{n+1} - w_n) = 1$
7. En déduire $\exists n_0 \in \mathbf{N} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; w_{n_0} \leq w_n \leq 2(n - n_0) + w_{n_0}$ En déduire la limite de (a_n).

37 Suite implicite

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit n un entier naturel non nul . On considère $f_n : \mathbf{R}+ \to \mathbf{R}, x \mapsto x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - 1$.

1. Montrer que f_n s'annule une unique fois en un réel noté a_n.
2. En utilisant geogebra ou Python représenter les courbes de $f_1, \dots, f_{20}$. Faire une conjecture sur la monotonie et la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
3. a) Donner le signe de $f_{n+1}(a_n)$.
   b) En utilisant la monotonie de f_{n+1} comparer a_n et a_{n+1}.
   c) Conclure quant à la monotonie de (a_n).
   d) Prouver la convergence de (a_n) vers un réel notée ℓ.
   e) En utilisant pour $n > 1$ que $a_n \leq a_2 < 1$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{n+1}$ et en déduire que $\dfrac{1}{1-\ell} - 2 = 0$.
   f) Déduire la valeur de l.

38 Suite implicite et dichotomie

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$, et telle que $f(a)f(b) < 0$.
On rappelle l'algorithme de dichotomie pour trouver l'unique solution $x_\star$ à l'équation $f(x) = 0$:
— Partant du premier segment $[a_0, b_0] = [a, b]$, on construit, à chaque passage dans une boucle, un nouveau segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.
— de longueur deux fois plus petite que celle de $[a_n, b_n]$ en introduisant $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
— contenant la solution $x_\star$.
— $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est construit en examinant le signe de $f(a_n)f(c_n)$.
Dans tout l'exercice on se place sur $\mathbf{R}_+$.

1. a) Soit f définie par $f(x) = x^{20} - x - 2$. Justifier qu'il existe un unique γ avec $1 \leq \gamma \leq 2$, tel que $f(\gamma) = 0$.
   b) Ecrire un script Python qui donne par dichotomie une valeur approchée de γ à 10^{-3}.
2. Pour α et β dans $\mathbf{R}_+^*$ et $n \in \mathbf{N}$ $n \geq 2$, on définit f_n par $f_n(x) = x^n - \alpha x - \beta$.
   a) Justifier l'existence d'un unique réel positif u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
   b) Que dire de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ lorsque $\alpha + \beta = 1$?
3. On se place désormais dans le cas où $\alpha + \beta \neq 1$.
   a) Etablir que $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n(1 - u_{n+1})$.
   b) Montrer que si $\alpha + \beta < 1$ alors $u_n \in [0, 1[$
   c) Déterminer un intervalle « symétrique »lorsque $\alpha + \beta > 1$.
   d) Montrer que (u_n) est monotone puis qu'elle converge. On note l sa limite .
   e) On suppose que $l \neq 1$.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha + \beta < 1. \\ +\infty & \text{si } \alpha + \beta > 1. \end{cases}$. En déduire que $l = 1$.

39 Équivalent du terme général d'une suite implicite

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Rappel : algorithme de dichotomie.
On considère une fonction g continue sur un intervalle $[a;b]$. On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a;b]$ en un point que l'on note α. On définit les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ de la façon suivante :

* *$a_0 = a$ et $b_0 = b$.*
* *Pour tout entier naturel k, on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ et :*

$$\text{si } g(a_k)g(c_k) \leqslant 0, \text{ alors } a_{k+1} = a_k \text{ et } b_{k+1} = c_k$$

$$\text{sinon } a_{k+1} = c_k \text{ et } b_{k+1} = b_k$$

On sait alors que les suites $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ convergent toutes les deux vers α.
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère l'équation :

$$(E_n) \quad x^n - x = n.$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, (E_n) possède dans $\mathbf{R}_+$ une unique solution notée u_n.
2. a) Écrire une fonction `u(n)` qui calcule une valeur approchée de u_n en utilisant la méthode de dichotomie appliquée à une fonction bien choisie. On utilisera le résultat de la question 2.(b).
   b) Représenter graphiquement les 15 premiers termes de la suite (u_n). Quelle conjecture peut-on faire ?
3. a) Soit $n \geqslant 2$. Établir que : $n^{2/n} \leqslant n$.
   b) Montrer alors que :
   $$\forall\, n \geqslant 2,\ 1 < u_n \leqslant n^{2/n}.$$
   c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose : $v_n = u_n - 1$.
   a) Montrer que :
   $$\forall\, n \geqslant 2, \quad n\ln(v_n + 1) = \ln(v_n + 1 + n).$$
   b) En déduire que $v_n \sim \dfrac{\ln n}{n}$.

40 Point fixe attractif d'une application contractante

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $a < b$ deux réels et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a, b]$ dans lui-même. Soit $k \in [0, 1[$. On suppose que f est k-contractante sur $[a, b]$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in [a, b],\ |f'(x)| \leq k.$$

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in [a, b]^2 \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.
2. On dit qu'un réel x est un point fixe de f si $f(x) = x$.
   - **a)** Montrer que f admet un point fixe sur $[a, b]$ (On pourra étudier g définie par $g(x) = f(x) - x$).
   - **b)** Montrer que ce point fixe est unique. On le notera c dans la suite.
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbf{N}\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
   - **a)** Montrer que la suite est bien définie , à valeurs dans $[a, b]$ et vérifie :
   $$\forall n \in \mathbf{N}\ , |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|.$$
   - **b)** (*les 3/2 peuvent admettre tant que la notion n'a pas été vue*). Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge absolument.
   - **c)** (*idem*). En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.
   - **d)** Montrer que la limite de la suite (u_n) est l'unique point fixe c de f.
   - **e)** Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}\ , |u_n - c| \leq k^n |u_0 - c|$
4. **a)** Montrer que l'équation
   $$(E) \qquad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = 0$$
   admet sur $[a, b] = [-2, 0]$ une unique solution, notée α.
   - **b)** Montrer que la fonction g définie sur $[-2, 0]$ par $g(x) = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ admet un unique point fixe.
   - **c)** Montrer que g est $\frac{1}{2}$-contractante. Ecrire un script Python qui calcule une valeur approchée de α.

41 Dynamique des populations et modèle logisique discret

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On étudie l'évolution d'une population au cours du temps. À la date $n \in \mathbf{N}$, la population a un effectif P_n.

On note μ_n et ν_n respectivement les taux de mortalité et natalité à la date n par individu.

1. **a)** Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n, μ_n ,ν_n. Traiter le cas où les taux sont constants.

b) On suppose que μ_n et ν_n sont à présent des fonctions affines non constantes et non linéaires de P_n, c'est-à-dire :

$$\mu_n = aP_n + b \quad \nu_n = a' P_n + b'$$

pour des constantes a, a', b, b' non nulles.

Montrer (rapidement) qu'il existe des constantes r et K telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad P_{n+1} = P_n + rP_n(1 - \frac{P_n}{K})$$

2. On définit les deux intervalles réels $I = \left]0, \frac{1+r}{r}\right]$ et $J = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{r}\right]$.

On suppose que $r \in]0, \sqrt{3}]$, $P_0 \in I$, et $K = 1$. On définit sur I la fonction g par :

$$g(x) = x + rx\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

a) Écrire une fonction Python evolution, d'arguments r,n et P_0 qui renvoie en sortie la valeur correspondante du terme d'indice n, P_n de la suite.

b) Tracer P_5 et P_7 pour un millier de valeurs de P_0 (on prendra $r = 1.7$). Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

3. **a)** Déterminer le tableau de variation de g. Il sera bon de calculer les images par g des extrémités des intervalles I et J.

b) **i)** Montrer que : $\exists n_0 \in \mathbf{N} \quad P_{n_0} \in J$.

ii) Montrer qu'à partir de ce rang n_0, on a $P_n \in J$

c) Montrer qu'à partir d'un certain rang on a $|P_{n+1} - 1| < \alpha|P_n - 1|$ α est un réel dans $]0; 1[$ à préciser.

d) En déduire que (P_n) converge.

42 Modèle logistique de croissance d'une plante

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Reed et Holland, dans leur article publié en 1919 (*Reed, H.S. & Holland, R.H., Growth of sunflower seeds, Proceedings of the National Academy of Sciences*, étudiaient la croissance de plants de tournesol et proposaient une modélisation logistique pour cette croissance. Le but de cet exercice est de revisiter la partie mathématique de l'article cité. Les auteurs proposent de modéliser la croissance du tournesol au moyen de l'équation différentielle suivante :

$$f'(t) = rf(t)\left(1 - \frac{f(t)}{K}\right) \qquad (1)$$

où :
- $f(t)$ est a taille de la plante à la date $t \geq 0$,
- $f(0) = f_0 > 0$ est la taille initiale de la plante (au début de l'expérience),
- $r > 0$ est le taux de croissance du modèle,
- $K > 0$ est une constante appelée capacité limite du modèle.

Ce modèle, l'un des plus utilisés en écologie, est connu sous le nom de modèle logistique de croissance ou modèle de Verhulst (qui a proposé ce modèle de croissance de population en 1838). Comme dans le modèle de Malthus, la vitesse de croissance y est proportionnelle à la taille $f(t)$, mais également à la ressource disponible $K - f(t)$, ce qui introduit un phénomène de saturation. Dans la suite, on supposera que $f_0 < K$.

1. a) Comme $f(t)$ désigne une taille, quelle hypothèse peut-on formuler sur ses valeurs dans un premier temps ? Que peut-on alors supposer pour la fonction définie par $g(t) = \dfrac{K}{f(t)}$.

   Montrer que (1) est équivalente à $g'(t) = -rg(t) + r$ (2).

   b) En déduire que l'on a $f(t) = \dfrac{K}{1 + Be^{-rt}}$, où B est une constante à calculer en termes de f_0 et K.

2. Étudier lesvariations et les bornesde la solution f sur $\mathbf{R}_+$.

Les données publiées par Reed et Holland sont indiquées ci-dessous ; les instants $t = t_1, \dots, t_n$ sont ceux où l'on a mesuré la taille du plant :

3. Proposer à partir de ces données une valeur approchée de K. Dans la suite, on considèrera que cette valeur approchée est la valeur optimale de K.

   Dans leur article, Reed et Holland proposent d'introduire la fonction auxiliaire : $h(t) = \ln\left(\dfrac{f(t)}{K - f(t)}\right)$. et de réécrire la solution de (1) sous la forme : $h(t) = r(t - t^\star)$ la constante $t^\star$ étant la valeur de t telle que $f(t) = \dfrac{K}{2}$.

4. a) Justifier cette approche.

   b) Que peut-on dire de plus de $t^\star$?

5. Reed et Holland proposent de prendre $t^\star \simeq 34,2$ jours sans expliquer. Pouvez-vous justifier ce choix ?
On cherche désormais à estimer le taux de croissance r.

6. **a)** Proposer une méthode pour estimer le paramètre r à partir des valeurs $h(ti)$.

b) Réaliser une représentation graphique des données expérimentales (t_i, f_i) et une représentation graphique du modèle prédictif $(t_i, f(t_i))$. Que remarque-t-on ?

43 Modèle stochastique de dynamique des populations

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soient p, q deux réels de l'intervalle $]0, 1[$ et tels que $p + q \leq 1$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par :

$$(R) \quad \begin{cases} v_0 \in [0, 1] \\ \forall n \in \mathbf{N} \quad v_{n+1} = q + (1 - p - q)v_n + pv_n^2. \end{cases}$$

On définit la fonction $f : x \mapsto f(x) = q + (1 - p - q)x + px^2$.

1. Étude de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

a) Écrire une fonction `Python` qui permet de visualiser sur un même graphique les courbes des fonctions f et $x \mapsto x$. Tester cette fonction pour les différentes valeurs de p suivantes : p=0.1, 0.2, 0.3, 0.4 et 0.5, et choisir q vérifiant les conditions imposées dans l'exercice.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}, v_n \in [0, 1]$.

c) Montrer que les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont $x = \dfrac{q}{p}$ et $x = 1$.

d) Cas où $q < p$: Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, et donner sa limite.

Indication : On pourra s'aider d'un graphe obtenu en question **1. a)**

e) Que se passe-t-il si $q > p$?

2. Application. On considère l'évolution d'une population d'individus à différents instants $n \in \mathbf{N}$. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre d'individus vivants à la génération n. On suppose que chaque individu peut donner naissance à d'autres individus et que les comportements des individus sont mutuellement indépendants. Dès qu'un individu donne une descendance, il meurt. Chaque individu peut donner naissance à $j \in \{0, 1, 2\}$ descendants, suivant la loi de probabilité suivante : 0 enfant avec une probabilité q, 1 enfant avec une probabilité $1 - p - q$, à 2 enfants avec une probabilité p.

Pour tout entier n de $\mathbf{N}$, on note $u_n = P(X_n = 0)$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la relation de récurrence donnée en (R).

Quelles interprétations pouvez-vous faire en terme de dynamique de la population ?

44 Moment d'ordre 2 d'une série exponentielle

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $p \geq 0$ un entier.

1. Vérifier que pour tout entier n, on a :

$$(n+p)(n+p-1) = n^2 + (2p-1)(n+p) - p^2$$

.

2. En déduire que :

$$\forall n \geq 2-p \quad \frac{n^2}{(n+p)!} = \frac{1}{(n+p-2)!} - \frac{(2p-1)}{(n+p-1)!} + \frac{p^2}{(n+p)!}.$$

3. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2 2^n}{(n+1)!}$ (où $n \geq 0$) converge et calculer sa somme.
4. À quelle condition sur α la fonction $n \mapsto \alpha u_n$ définit une fonction de masse sur $\mathbf{N}^\star$?
5. En remarquant que la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est strictement croissante, proposer une fonction en **`Python`** qui prend en entrée un entier $m \geq 0$ et qui renvoie en sortie une valeur approchée à 10^{-m} près de la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

45 Moments d'une série exponentielle

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $\lambda \geq 0$ et $r \geq 1$ un entier. On veut montrer que la série $\Pi\left(\lambda\right) = \sum_{n\geq 0} n^r \frac{\lambda^n}{n!}$ est convergente.

1. Montrer que si $n \geq r$ est un entier, les inégalités suivantes sont vraies :
   a) $n \leq r(n-r+1)$.
   b) $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) \geq (n-r+1)^r$.
   c) $\frac{n^r}{n!} \leq \frac{r^r}{(n-r)!}$.
2. En déduire que pour tout $\lambda > 0$ et tout entier $n > r \geq 1$:

$$0 \leq n^r \frac{\lambda^n}{n!} \leq (\lambda r)^r \frac{\lambda^{n-r}}{(n-r)!}$$

3. Répondre à la question initiale.
4. On considère maintenant $\mu \in \mathbf{R}$ un réel quelconque. Étudier la nature de la série $\Pi(\mu)$.
5. Proposer une fonction **`Python`** qui prend en entrée un flottant strictement positif `mu`, un entier `r` strictement positif, un entier `p` strictement positif et qui renvoie en sortie une valeur approchée à 10^{-p} près de la somme de la série $\Pi(\mu)$.

46 Série de terme général $\frac{a_n}{S_n}$

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes strictement positifs. On note (S_n) la suite des sommes partielles de la série de terme général a_n.

1. *Question préliminaire.* Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs non nulles à partir d'un certain rang telles que :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Calculer pour tout entier naturel non nul n :
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{S_k}\right).$$
3. Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum \frac{a_n}{S_n}$ sont de même nature.
4. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Montrer que la série $\sum \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. *Indication : remarquer que si* $\alpha > 1$, $\frac{a_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$.
5. On suppose dans cette question que $a_n = f(n)$ où f est une fonction donnée, et que cette fonction f est implémentée en **Python**. Écrire une fonction **PremierRang(M,alpha)** qui prend en entier deux flottants `M` et `alpha` < 1, et qui renvoie en sortie le plus petit entier n_0 tel que $\sum_{k=1}^{n_0} \frac{a_k}{S_k^\alpha} > M$.

47 Convergence des séries ζ

```
Déroulement de la khôlle
```

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page* *(p. 156)* *de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Pour tout réel s, on considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$. La somme de cette série est notée $\zeta(s)$.

1. Programmer en python une fonction `zeta(s,n)` renvoyant en sortie la liste des n premières sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$.

2. **a)** Est-ce que $\zeta(1)$ existe ? Est-ce que $\zeta(2)$ existe ?

b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$. pour $s\in]0,1[$.

c) En déduire également la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ pour $s>2$.

d) Que dire de $\zeta(s)$ pour $s\leq 0$?

3. Dans cette question, on suppose que $s\in]1,2[$.

a) Conjecturer à l'aide de la question **1.** l'existence de $\zeta(s)$.

b) Soit k un entier. Établir que :

$$\forall k\geq 2\quad 0\leq\frac{1}{k^s}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}.$$

Indication : interpréter ces inégalités en termes d'aire après avoir introduit une fonction judicieusement choisie.

c) En déduire que

$$\forall n\geq 2\quad 0\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^s}\leq\frac{1}{s-1}\left(1-\frac{1}{n^{s-1}}\right)$$

d) Conclure quant à l'existence de $\zeta(s)$ pour $s\in]1,2[$.

4. Étudier l'existence de $\zeta(s)$ pour $s\in]0,1[$.

Algèbre linéaire

48 Plan de fonctions

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et pour $k \in \{1 \dots n\}$, on note f_k la fonctions définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R} \quad f_k(x) = \cos(x+k)$. Dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$, on pose :

$$F = \operatorname{Vect}(f_0, \dots, f_n) \qquad \text{et } E = \operatorname{Vect}(\cos, \sin)$$

1. Écrire un programme permettant de représenter sur un même graphique les fonctions $f_0, \dots, f_{10}$
2. **a)** Justifier que E est un espace vectoriel dont on précisera une base.
   b) Montrer que $F \subset E$.
   c) En déduire la dimension de F et en donner une base.
3. **a)** Prouver qu'il existe des réels $\lambda_0, \dots \lambda_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \sin x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos(x+k).$$

   b) Les nombres λ_k sont ils uniques ? Justifier.
   c) Montrer que (f_0, f_1) est une base de E et donner la matrice de passage de la base $(\cos, \sin)$ à la base (f_0, f_1).
   d) Écrire une fonction `coord(U)` prenant en entrée une liste (a, b) de flottant représentant le vecteur de $u \in E$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sur la base $(\cos, \sin)$ et renvoyant en sortie la liste V des coordonnées de u sur la base (f_0, f_1).

49 Solutions d'une équation différentielle (chaleur 1D stationnaire)

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $E = \mathscr{C}^2(\mathbf{R})$.
On considère le sous-ensemble F de E défini par :

$$F = \left\{u \in E \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad u''(x) = (1 + x^2)u(x)\right\}$$

Soit par ailleurs les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \qquad g(x) = f(x)\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

1. Établir que F est un espace vectoriel.
2. **a)** Programmer en Python deux fonctions `f(x)` et `g(x)` prenant toutes deux en entrée un flottant `x` et renvoyant en sortie respectivement le flottant $f(x)$ et une valeur approchée de $g(x)$ calculée par la méthode des rectangles.
   b) Tracer les fonctions f et g sous Python.
3. **a)** Après avoir prouvé que f et g sont $\mathscr{C}^1(\mathbf{R})$, montrer que :
   $$\forall x \in \mathbf{R} \quad f'(x) = xf(x) \quad \text{ et } g'(x) = xg(x) + e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
   b) Montrer que F contient $\mathrm{Vect}(f, g)$.
4. **a)** Soit u et v deux fonctions de F, montrer que la fonction $u'v - uv'$ est constante.
   b) Soit $h \in F$. Montrer que les fonctions h/f et g/f sont définies sur $\mathbf{R}$ et dérivables, puis que pour un réel β indépendant de x, on a : $\left(\frac{h}{f}\right)' = \beta\left(\frac{g}{f}\right)'$.
   c) En déduire une base $\mathscr{B}$ de F ainsi que sa dimesnsion.
5. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et une fonction u de F vérifiant $(u(0), u'(0)) = (a, b)$. Calculer les coordonées de u sur la base $\mathscr{B}$.

50 Sous-algèbre de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Pour trois réels a, b, c donnés, on note

$$M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}),$$

et soit $E = \{M_{a,b,c} \quad (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel dont on donnera une base notée $\mathscr{B}$ par la suite ainsi que la dimension.
2. a) Programmer une fonction `estDansE(M)` qui prend en entrée un tableau numpy représentant une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et renvoyant en sortie le booléen `True` si M est dans E et `False` sinon.
   b) Programmer une fonction `M(a,b,c)` qui prend en entrée trois flottants a,b,c et renvoie en sortie le tableau numpy représentant la matrice $M_{a,b,c}$.
   c) Utiliser les fonctions précédentes pour vérifier expérimentalement que le produit de deux matrices de E est encore dans E.
3. Montrer que le produit de deux matrices de E est encore dans E.
4. Soit $A = M_{2,1,1}$.
   a) Montrer que $A^3 \in E$ et donner les coordonnées de A sur la base $\mathscr{B}$ calculée en **1.**.
   b) Calculer A^2 et donner ses coordonnées sur $\mathscr{B}$.
   c) Prouver que $\mathscr{B}' = (I_3, A, A^2)$ est une base de E.
   d) Donner les coordonnées de A^3 sur la base $\mathscr{B}'$.
   e) Répondre à la question précédente en exprimant A^3 en fonction de A et I_3.

51 Famille de fonctions exponentielles

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On définit les fonctions cosinus et sinus hyperboliques par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. On définit pour $k \in \{0 \dots n\}$ la fonction $f_k : t \mapsto \operatorname{ch}(t+k)$.
On désigne par E le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathscr{F}(\mathbf{R};\mathbf{R})$ engendré par la famille $(f_0, \dots, f_n)$.

1. Déterminer la dimension de F où $F = \operatorname{Vect}\left(t \mapsto e^{-t}, t \mapsto e^t\right)$.
2. **a)** Montrer que $E \subset F$

   b) Étudier l'indépendance de la famille $(f_0, \dots, f_n)$.
3. Déterminer la dimension de E après avoir identifié les valeurs possibles de sa dimension.
4. Justifier l'existence de réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \operatorname{sh}(t) = \alpha_0 \operatorname{ch}(t) + \alpha_1 \operatorname{ch}(t+1) + \dots + \alpha_n \operatorname{ch}(t+n).$$

   Y-a-t'il unicité de la décomposition ?
5. Après avoir justifié que les fonctions f_0 et f_1 forment une base de F, proposer un programme **Python** prenant en entrée la liste `X = [x[0],x[1]]` des coordonnées d'un vecteur d'un vecteur f de F décomposé sur la base $(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t})$ et renvoyant en sortie la liste des coordonnées de f sur la base f_0, f_1.
   On rappelle que le module **numpy** *permet de faire du calcul matriciel et que par exemple, pour rentrer la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *on peut utiliser la commande :*

console
```
In [1]: A = np.array([[1,2],
                      [3,4]])
```

   En outre, l'appel du coefficient en position i, j dans `A` (attention, les indices commencent à zéro) se fait par l'instruction `A[i,j]`.

52 Famille de fonctions trigonométriques

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0(\mathbf{R})$ des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, on considère les fonctions suivantes :

$$\mathbf{1}\text{, la fonction constante égale à } 1 \quad c_k := \cos^k \quad (k \in \mathbf{N}^\star) \quad e_p : x \mapsto \cos(px) \quad (p \in \mathbf{N}^\star)$$

et les deux familles de fonctions suivantes :

$$\mathscr{B} = (\mathbf{1}, c_1, c_2, c_3) \quad \mathscr{C} := (\mathbf{1}, e_1, e_2, e_3)$$

1. Vérifier que ces deux familles sont libres.
2. On note $E = \operatorname{Vect} \mathscr{B}$ et $F = \operatorname{Vect} \mathscr{C}$. Montrer que $E = F$.
3. Soit $f \in E$. Exprimer les coordonnées de f sur la base $\mathscr{C}$ en fonctions de ses coordonnées sur la base $\mathscr{B}$.
4. Proposer en **`Python`**
   a) une fonction qui prend en entrée un entier n et qui renvoie en sortie $n!$
   b) une fonction qui prend entrée deux entiers n, k positifs et qui renvoie la valeur de $\binom{n}{k}$ (on rappelle que ce nombre est nul si $k > n$).
5. Linéariser $\cos^{2p} t$.
6. Proposer une fonction **`Python`** qui prend en entrée un entier p et qui renvoie la liste des coefficients apparaissant dans la linéarisation de $\cos^{2p} t$.

53 Sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \quad (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel dont on donnera une base notée $\mathscr{B}$ et la dimension.
2. Programmer une fonction `estDansE(M)` qui prend en entrée un tableau numpy représentant une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et renvoyant en sortie le booléen `True` si M est dans E et `False` sinon.
3. Est-ce que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est dans E ?
4. Calculer les coordonnées de la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ sur la base $\mathscr{B}$.
5. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$. Donner les coordonnées canoniques de A.
6. Donner un système d'équations de E sur la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

54 Espace vectoriel de suites

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $a > 0$ un réel donné et E_a l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant :

$$(R_a) \qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = a(n+1)u_n.$$

1. Montrer que E_a est un espace vectoriel.
2. Écrire en `Python` le script d'une fonction `est_dansE(a,U)` prenant en entrée un flottant `a`, une liste de flottants `U=[U[0]...]` de longueur quelconque, et qui renvoie `True` si la relation (R_a) est vérifiée pour une suite u dont les premiers termes seraient ceux de la liste `U`, et renvoyant `False` sinon.
3. Prouver que la suite $A = (a^n n!)_{n\in\mathbf{N}}$ est dans E_a.
4. Tester la fonction `est_dansE(a,U)` pour `a=1` et `U` la liste des quatre premiers termes de la suite A.
5. Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite quelconque de E_a. Trouver un scalaire λ tel que la suite $w = v - \lambda A$ ait son premier terme nul.
6. En déduire une base et la dimension de E_a.

55 Suites récurrentes linéaires à deux pas

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.On considère l'ensemble E des suites (u_n) à termes **complexes**, indexées sur $\mathbf{N}$ vérifiant la relation :

$$(R) \qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} - 2(\cos\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$$

Ici, E est vu comme un sous-ensemble du $\mathbf{C}$-espace vectoriel des suites à termes complexes indexées sur $\mathbf{N}$.

Dans cet exercice, on n'utilisera aucun résultat de cours sur les suites récurrentes linéaires à deux pas, notamment, on n'utilisera pas le théorème donnant l'expression du terme général de ces suites, le but étant ici de démontrer ce théorème !

1. Proposer une fonction **Python** qui prend en entrée trois flottants `a` et `b`, `theta`, un entier `n` et qui renvoie en sortie la valeur du terme u_n de la suite initialisée par $u_0 = $ `a`, $u_1 = $ `b` et vérifiant (R) (on pourra importer la fonction cosinus du module `math` ou `numpy`).
2. Montrer que E est un espace vectoriel.
3. Montrer que si une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ est dans E, la suite notée $\bar{u}$ dont le terme général est $\overline{u_n}$ est aussi dans E.
4. On suppose que E contient une suite géométrique non nulle de raison $r \in \mathbf{C}$ (on rappelle que $0^0 = 1$). E.
   a) Montrer que r vérifie l'équation :
   $$r^2 - 2r\cos\theta + 1 = 0.$$
   b) Réciproquement, montrer que E possède deux suites géométriques de raison distinctes.
   c) Soit α et β deux complexes quelconques. Fabriquer une suite (u_n) de E telle que $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$.
   d) En déduire que toute suite de E est combinaison linéaire de deux suites géométriques que l'on précisera.
5. Donner alors la dimension de E ainsi qu'une base.
6. Montrer que les suites de terme général respectif $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ sont dans E (indication : on pourra utiliser **3.**)
7. Montrer que ces deux suites forment aussi une base de E.

56 Carrés magiques

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On appelle carré magique toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ dont la somme de chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale donne toujours la même valeur. Cette valeur s'appelle nombre magique du carré magique M, et on la note $\mu(M)$. On pose

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. On peut montrer (mais c'est un peu long à écrire) que l'ensemble $\mathscr{M}^\star$ des carrés magiques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
   a) Montrer que l'ensemble des matrices 3×3 dont la somme des coefficients de la première ligne est nulle est un espace vectoriel.
   b) En déduire que l'ensemble $\mathscr{M}_0^\star = \{ M \in \mathscr{M}^\star \quad \mu(M) = 0 \}$ des carrés magiques dont le nombre magique est nul est un sous $\mathbf{R}$-espace vectoriel de $\mathscr{M}^\star$.
2. On note $\mathscr{K} = \mathrm{Vect}(\mathbf{C})$.
   Soit $M \in \mathscr{M}^\star$. Trouver une matrice K de $\mathscr{K}$ telle que la matrice $M - K$ soit dans $\mathscr{M}_0^\star$. La matrice K est-elle unique ?
3. En déduire que tout élément M de $\mathscr{M}^\star$ s'écrit de façon comme :
   $$M = M_0 + K \quad \text{où } M_0 \in \mathscr{M}_0^\star, \quad K \in \mathscr{E}.$$
4. Montrer que tout élément N de $\mathscr{M}_0^\star$ est de la forme :
   $$N = \begin{pmatrix} a & b & -(a+b) \\ d & e & -(d+e) \\ -(a+d) & -(b+e) & -(a+e) \end{pmatrix} \quad (a, b, d, e) \in \mathbf{R}^4.$$
5. En déduire que $e = 0$ et $d = -2a - b$.
6. Donner enfin une base et la dimension de $\mathscr{M}^\star$.
7. a) Écrire une fonction **Python** qui renvoie la liste des entiers de 1 à 9 dans un ordre aléatoire. On rappelle pour cela que la fonction `choice` du module `random` prend une liste `L` en entrée et revoie en sortie un élément pris au hasard dans `L`. On rappelle aussi que la commande `L.pop(i)` renvoie l'élément d'indice `i` de la liste `L` et élimine ce dernier de `L`.
   b) Écrire une fonction **Python** qui fabrique (à tâtons) un carré magique avec les entiers de 1 à 9. On pourra représenter une matrice à l'aide du module `numpy` et utiliser les commandes suivantes :

console
```
In [1]: import numpy as np
L = range(1,10)
# conversion de L en matrice 3 x 3 :
In [2]: A = np.array(L).reshape(3,3)
In [3]: A
Out[3]: array([[1, 2, 3],
               [4, 5, 6],
               [7, 8, 9]])
```

57 Interpolation de Lagrange

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Sous **Python**, on décide de représenter un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ par la liste des coefficients de ses monômes par degré croissant. Ainsi, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, P est représenté par la liste `[a0, a1, ..., an]`.

a) Écrire une fonction prenant en entrée la liste des coefficients d'un polynôme de degré au plus n et renvoyant en sortie le degré de ce polynôme. On convient que si le polynôme est nul, la fonction renvoie la valeur -1.

b) En déduire une fonction prenant en entrée la liste des coefficients d'un polynôme de degré au plus n et renvoyant en sortie le coefficient de plus haut degré de ce polynôme. On convient que si le polynôme est nul, la fonction renvoie la valeur 0.

2. Soit $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ 4 réels fixés.

a) Montrer que s'il existe un polynôme P_0 dans $\mathbf{R}_3[X]$ vérifiant les relations suivantes :

$$(L) \qquad P_0(x_0) = 1, \quad \text{et :} \quad \forall k \in \{1, 2, 3\} \quad P_0(x_k) = 0$$

alors P_0 est unique.

b) On cherche à prouver qu'un tel polynôme P_0 existe. Quelles sont nécessairement ses racines ? En déduire sa factorisation (on n'oubliera pas de calculer son coefficient dominant).

c) Montrer qu'il existe un unique polynôme P_0 de $\mathbf{R}_3[X]$ vérifiant les relations (L).

d) Montrer que pour tout entier j dans $\{0, 1, 2, 3\}$, il existe un unique polynôme P_j dans $\mathbf{R}_3[X]$ tel que :

$$P_j(x_j) = 1, \quad \text{et :} \quad \forall k \neq j \quad P_j(x_k) = 0.$$

3. Montrer que la famille $\mathscr{L} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

4. Donner les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbf{R}_3[X]$ sur la base $\mathscr{L}$.

58 Puissances de matrices

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On rappelle que le module **numpy** *permet de faire du calcul matriciel et que par exemple, pour rentrer la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *on peut utiliser la commande :*

```
console
In [1]: import numpy as np
In [2]: A = np.array([[1,2],
                      [3,4]])
```

En outre, l'appel du coefficient en position i, j dans `A` (attention, les indices commencent à zéro) se fait par l'instruction `A[i,j]`.

1. a) Écrire une fonction prenant en entrée deux matrices `A`, `B` carrées de taille 3×3 et renvoyant en sortie le produit matriciel des deux matrices. On demande ici de de ne pas utiliser la fonction `dot` du module `numpy`. *indication : la commande `np.zeros_like(A)` crée une matrice nulle de même taille que A . On rappelle aussi le que le coefficient en position (i, j) dans le produit AB est $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{j,k}$. En particulier.*
   b) En déduire une fonction `puissance(A,n)` qui prend une matrice 3×3 en entrée et qui renvoie en sortie la matrice A^n. *indication : la commande `np.eye(3)` crée la matrice I_3, et on rappelle que pour toute matrice M de taille 3×3, $M^0 = I_3$.*
2. Dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, on considère les matrices suivantes :

$$I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Montrer que la famille A, A^2 est libre.
   b) Donner une base et la dimension de $\mathscr{P} = \mathrm{Vect}(A, A^2)$.
   c) Calculer A^3 et donner une relation entre A, A^2, A^3. La famille (A, A^2, A^3) est-elle libre ?
   d) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $A^n \in \mathscr{P}$.
   e) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique couple de réels (a_n, b_n) tel que $A^n = a_n A + b_n A^2$.
   f) Montrer que la suite (a_n) ainsi définie vérifie la relation suivante :

$$\forall n \geq 1 \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n.$$

   g) Donner pour toute entier $n \geq 1$ les coordonnées de A^n vue comme élément de $\mathscr{P}$ sur la base (A, A^2)

59 Polynôme annulateur et diagonalisation

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A - 3I_3)^2(A - I_3)$. Étudier l'inversibilité de A, et le cas échéant, donner une expression de A^{-1}.
2. Montrer que les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et 3.
3. Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et 3. Étudier la diagonalisabilité de A.
4. On pose $B = A - 3I_3$. Calculer B^n pour tout entier n, puis A^n.
5. La commande `array(L)` permet en **Python** de définir une matrice A, l'argument `L` étant une liste, ses items étant eux-mêmes des listes, la i-ème étant le i-ème ligne de A. Si `M` est une matrice définie par cette commande, l'instruction `M.shape` renvoie un tuple `(n,p)` contenant respectivement le nombre de lignes et de colonnes de A. par exemple :

```
console
In [3]: M = array([[1,2,3],[4,5,6]])
In [4]: print(M)
Out[4]: [[1, 2, 3],
         [4, 5, 6]]
In [5]: M.shape
Out[5]: (2, 3)
```

Le coefficient en position `i,j` dans `M` est repéré par `M[i,j]` La commande `zeros_like(M)` permet de créér la matrice nulle de même format que `M` Programmer une fonction `produit` qui prend en entrée deux matrices A,B et renvoie en sortie :
— La matrice AB
— Un message d'erreur si les formats de A et B sont incompatibles.

60 Calcul des puissances d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Dans $E = \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, on considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $B = A^2 + 2I$. Est-ce que B est diagonalisable ?
2. Montrer que $B^2 = B + 2I$.
3. **a)** Déterminer les valeurs propres de B. En déduire les sous-espaces propres associés.

   b) La fonction `eigvals` du module **`numpy.linalg`** prend en entrée une matrice `M` (représentée par un tableau 2-dimensionnel) et renvoie en sortie la matrice 1-dimensionnelle contenant les valeurs propres de `M`. L'utiliser pour vérifier que les valeurs propres de `B` calculées sont bien les bonnes.
4. Exprimer pour tout entier naturel n la matrice B^{n+2} en fonction de B^{n+1} et B^n (Rappel : par convention $M^0 = I$ pour une matrice carrée). En déduire une fonction **`puissanceB(n`** prenant en entrée un entier `n` et renoyant en sortie la matrice B^n calculée par récurrence.
5. **a)** Soit X un vecteur propre de A pour la valeur propres $\lambda \in \sigma(A)$, et soit $m \in \mathbf{N}^\star$. Exprimer $A^m X$ en fonction de λ, X, m.

   b) Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda^2 + 2$ est une valeur propre de B.

   c) En déduire que A n'est pas diagonalisable dans E.
6. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} en fonction de B et I.
7. On cherche à calculer les puissances de B.

   a) Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $X^n = (X^2 - X - 2)Q_n + R_n$ où Q_n, R_n sont deux polynômes tels que $\deg Q_n < 2$, de sorte que l'on peut poser :

   $$R_n = a_n X + b_n.$$

   Calculer a_n, b_n. (*indication : penser aux racines de* $X^2 - X - 2$).

   b) En déduire la valeur de B^n pour tout entier n.

61 Récurrence linéaire à 3 pas et diagonalisation

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par la donnée de ses trois premiers termes réels u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}N;\ u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_n + u_{n+1} + u_{n+2}).$$

On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, et pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Sot v un nombre complexe. Prouver que $|\mathfrak{Re}(v)| \leq |v|$ et que $|\mathfrak{Im}(v)| \leq |v|$.
2. Ecrire une fonction en Python prenant en argument les trois premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et renvoyant la liste de ses 100 premiers termes. Utiliser cette fonction pour étudier le comportement asymptotique de la suite sur quelques exemples.
3. **a)** Démontrer que 0 n'est pas valeur propre de A.

   b) Démontrer que, pour tout nombre complexe λ, λ est valeur propre de A si et seulement si λ est solution de l'équation : $x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.

   c) En déduire que A possède une valeur propre réelle à préciser ainsi que deux valeurs propres complexes z, $\bar{z}$ conjugées (non réelles) que l'on ne cherchera pas à calculer.

   d) Vérifier que $|z| < 1$.
4. Démontrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ telle que : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z} \end{pmatrix} P^{-1}$.
5. Pour tout entier naturel n, exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n, et en déduire une expression de X_n en fonction de n, A et X_0.
6. En déduire qu'il existe trois nombres complexes a, b et c (que l'on ne demande pas d'expliciter), et indépendants de n tels que :
$$\forall n \in \mathbf{N}N;\ u_n = a + bz^n + c\,(\bar{z})^n.$$
7. Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (|bz^n + c\,(\bar{z})^n|) = 0$.

   Que peut-on dire alors de $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathfrak{Re}\,(bz^n + c\,(\bar{z})^n))$ et de $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathfrak{Im}\,(bz^n + c\,(\bar{z})^n))$?
8. En déduire que $a \in \mathbf{R}R$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = a$.

62 Disques de Gershgorin

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ à *diagonale dominante*, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i \in \{1 \dots n\} \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

1. La commande `array(L)` du module `numpy` permet en **Python** de définir une matrice M, l'argument `L` étant une liste, ses items étant eux-mêmes des listes, la i-ème étant lA i-ème ligne de M. Si `M` est une matrice définie par cette commande, l'instruction `M.shape` renvoie un tuple `(n,p)` contenant respectivement le nombre de lignes et de colonnes de M. par exemple :

```
console
In [6]: M = array([[1,2,3],[4,5,6]])
In [7]: print(M)
Out[7]: [[1, 2, 3],
         [4, 5, 6]]
In [8]: M.shape
Out[8]: (2, 3)
```

   Le coefficient en position `i,j` dans `M` est repéré par `M[i,j]`.

   Programmer une fonction `est_a_diag_dom(A)` prenant en entrée une matrice `A` et renvoyant en sortie `True` si A est à diagonale dominante et `False` sinon (le module `numpy` implémente les nombres complexes, le module d'un nombre complexe `z` est obtenu par `abs(z)`)

2. Caractériser l'inversibilité de A en termes de spectre.

3. En considérant une colonne X non nulle telle que $AX = 0$, montrer que A est inversible. On pourra poser $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et commencer par prouver qu'on peut supposer que le plus grand coefficient de X en module vaut 1.

4. Pour z_0 complexe et $r > 0$, on note $D(z_0, r) = \{z \in \mathbf{C} \quad |z - z_0| \leq r\}$ (disque centré en z_0 de rayon r). Montrer que le spectre de A est contenu dans l'ensemble Z donné par :

   $Z = \bigcup_{i=1}^{n} D(a_{i,i}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|)$ (*remarque : ces disques sont appelés disques de Gershgorin*).

5. (*Application*). Soit A la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Programmer une fonction `gershgorin` prenant une matrice A en entrée et renvoyant la liste des couples (c, r) des centres et rayons de Gershgorin de la matrice A.

1. Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A. $|\lambda| \leq 2$. On pose alors $\lambda = 2\cos\theta$ où $\theta \in [0, \pi[$.

2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

63 Système différentiel

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. A est-elle diagonalisable ? Donner le cas échéant une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
2. La fonction `eigvals` du module **`numpy.linalg`** prend en entrée une matrice `A` (représentée par un tableau 2-dimensionnel) et renvoie en sortie la matrice 1-dimensionnelle contenant les valeurs propres de `A`. L'utiliser pour écrire une fonction `est_diago(A)` qui prend en entrée une matrice `A` et renvoie en sortie si le booléen `True` si une condition suffisante de diagonalisabilité en termes de valeurs propres est vérifiée par `A` et renvoie sinon une phrase indiquant qu'on ne peut pas conclure sur la diagonalisabilité de `A`.
3. On considère le système différentiel, d'inconnues les fonctions x, y, z de la variable t définies sur $\mathbf{R}$ et donné par :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} x' & = & -2x - 2y - 2z \\ y' & = & 4x - 2y - 4z \\ z' & = & -4x + y + 3z \end{array} \right.$$

   a) On définit des fonctions u, v, w par la relation :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   b) Écrire le système différentiel vérifié par u, v, w.

   c) En déduire les solutions de (S)

64 Commutant d'une matrice 2×2

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

On cherche toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AM = MA$.

1. Diagonaliser A, on donnera une matrice P diagonalisant A en une matrice D.
2. Trouver les matrices $N \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ qui commutent avec D, c'est-à-dire telles que $DN = ND$.
3. En déduire les matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ qui commutent avec A.
4. La fonction `eigvals` du module **`numpy.linalg`** prend en entrée une matrice `A` (représentée par un tableau 2-dimensionnel) et renvoie en sortie la matrice 1-dimensionnelle contenant les valeurs propres de `A`. L'utiliser pour écrire une fonction `est_diago(M)` qui prend en entrée une matrice `M` de taille 2×2 supposée diagonalisable renvoie en sortie des matrices `D` et `P` diagonalisant `M`.

65 Diagonalisation d'une matrice à paramètres

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit a, b deux nombres réels.

1. Discuter en fonction de a, b de la diagonalisabilité de la matrice $M(a, b)$ ci-dessous et la diagonaliser le cas échéant.
$$M(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$
2. Programmer une fonction `diago(a,b)` prenant en entrée des flottants `a`,`b` tels que `ab` > 0 et renvoyant en sortie des matrices `D` et `P` telles que $P^{-1}M(a,b)P = D$.

66 Endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère la fonction f définie sur $E = \mathbf{R}_n[X]$ par :

$$f(P) = P(X+1) + P(X)$$

1. Sous `Python`, on représente un polynôme $Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_qX^q$ par la liste `L = [a0,...,aq]` de ses coefficients ordonnée par degrés croissants. Écrire une fonction `opere(Q,n)` prenant en entrée [une liste représentant] un polynôme `Q`, un entier `n` positif, et renvoyant en sortie `True` si `Q` est dans $\mathbf{R}_n[X]$ et renvoyant `False` sinon.
2. Montrer que f définit un endomorphisme de E.
3. Calculer le noyau de f (*indication : considérer un polynôme non constant dans le noyau, et estimer le nombre de ses racines*).
4. Montrer que f est un isomorphisme.
5. Soit $k \in \{1 \dots n\}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q_k de E tel que

$$Q_k(X+1) + Q_k(X) = X^k.$$

6. Montrer que pour $k \in \{1 \dots n\}$ $\quad Q_k' = kQ_{k-1}$
   Indication : on pourra montrer que les endomorphismes f et $\frac{d}{dx}$ de E commutent).

67 Endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n\ ge 1$ un entier Dans $E = \mathbf{R}_n[X]$, on considère l'application f définie par :

$$f(P) = P + P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Donner la matrice A de f sur la base canonique de E, et la définir sous `Python` à l'aide du module `numpy`.
3. Sous `Python`, on représente un polynôme $Q = a_0+a_1X+\cdots+a_qX^q$ par la liste $[a_0, \ldots, a_q]$ de ses coefficients. Écrire une fonction `f(Q)` prenant en entrée [une liste de flottants représentant] un polynôme Q et renvoyant en sortie [la liste] le polynôme $f(Q)$.
4. Montrer que f et un isomorphisme.
5. Trouver tous les polynômes P de degré au plus n tels que :

$$P + P' = X^3 + X + 1.$$

6. Sous `Python`, avec le module `numpy`, la commande `np.array(L).reshape(k,1)` permet de convertir une liste `L` de longueur `k` en un tableau numpy de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{K})$. Proposer un script python permettant de calculer la (ou les) solution(s) de l'équation de la question précédente.
7. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Le diagonaliser le cas échéant dans le cas où $n = 2$.

68 Endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On rappelle que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ est la base $\mathscr{B}_C$ donnée par :

$$\mathscr{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Soit u l'application définie sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ par :

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbf{K}^4 : \quad u\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau de u et l'image de u.
3. Écrire sous `Python` une fonction `est_dans_Im(A)` prenant en entrée un tableau `numpy` 2-dimensionnel représentant une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et renvoyant en sortie `True` si A est dans l'image de u et `False` sinon.
4. Diagonaliser l'endomorphisme u si c'est possible.

69 Application commutant sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On rappelle que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ est la base $\mathscr{B}_C$ donnée par :

$$\mathscr{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'application définie sur $\mathscr{M}_2\,(\mathbf{K})$ par :

$$u(M) = MA - AM.$$

1. Vérifier que u est linéaire.
2. Donner la matrice de u sur la base canonique.
3. Déterminer le noyau et l'image de u.
4. Écrire sous `Python` une fonction `est_dans_Ker(A)` prenant en entrée un tableau numpy 2-dimensionnel représentant une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et renvoyant en sortie `True` si A est dans le noyau de u et `False` sinon.
5. Diagonaliser u si c'est possible.

70 Analyse d'une équation linéaire polynôme

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \geq 0$ un entier, $a \in \mathbf{R}$ et soit u l'application définie sur $E = \mathbf{R}_{n+4}[X]$ par :

$$u_a(P) = (X - a)\left(P' - P'(a)\right) - 2(P - P(a))$$

1. Montrer que u_a est un endomorphisme de E.
2. Donner sa matrice M_a sur la base canonique de E.
3. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme u_0.
4. En étudiant l'action de u_a sur une base bien choisie, déterminer le noyau et l'image de u_a.
5. L'endomorphisme u_a est-il diagonalisable ?
6. Sous **Python**, un polynôme $P = a_0 + \cdots + a_n X^{n+4}$ de $E = \mathbf{R}_{n+4}$ peut être vu comme la liste `LP = [a0,..a_n+4]` de ses coefficients ordonnés en puissances croissantes.

   a) Écrire une fonction `deriv(LP)` prenant en entrée la liste `LP` représentant un polynôme P de E et renvoyant en sortie la liste représentant le polynôme P'.

   b) Écrire une fonctions `somme(LP,LQ)` qui renvoie la liste représentant le polynôme $P + Q$.

   c) Écrire une fonction `X(LP)` renvoyant en sortie la liste représentant le polynôme XP auquel on a supprimé l'éventuel monôme de degré $n + 5$.

   d) Écrire une fonction `mult(mu,LP)` (`mu` est un flottant) renvoyant la liste représentant le polynôme μP.

   e) En déduire une fonction `u(LP)` prenant une liste `LP` représentant un polynôme P de E et renvoyant en sortie la liste représentant le polynôme $u_0(P)$.

71 Dérivation discrète et calcul explicite de sommes

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \geq 1$ un entier et $S_n := \sum_{k=1}^{n} k^4$ Le but de l'exercice est de donner une expression ne faisant pas intervenir le symbole $\sum$.

On introduit l'endomorphisme Δ de $E = \mathbf{R}_5[X]$ défini par

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. *Programmation.* Écrire une fonction `Python` prenant en entrée un entier `n`, et renvoyant en sortie la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^4$.
2. Montrer que Δ est bien un endomorphisme de E.
3. Donner sa matrice sur la base canonique de E.
4. Sous `Python`, on représente un polynôme $Q = a_0 + a_1 X + \cdots + a_q X^q$ par la liste `L = [a0,...,aq]` de ses coefficients ordonnée par degrés croissants. Écrire une fonction `Delta(Q)` prenant en entrée [une liste de flottant représentant] un polynôme Q et renvoyant en sortie [la liste des coefficients de] $\Delta(Q)$.
5. Déterminer l'image et le noyau de Δ.
6. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de E nul en 0 tel que $Q(X+1) - Q(X) = E_4$, où $E_4 = X^4$.
7. Donner une forme factorisée de S_n ne faisant pas intervenir de $\sum$.

On pourra remarquer que : $\quad \forall k \in \mathbf{N} \quad k^4 = E_4(k)$.

72 Famille à un paramètre d'endomorphismes nilpotents

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1; e_2; e_3)$. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E associé, défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. Ecrire en Python une fonction `f_a(x, y, z, a)` qui renvoie les coordonnées dans la base B de $f_a(u)$, le vecteur u étant de coordonnées $(x; y; z)$ dans la base $\mathscr{B}$.
2. **a)** Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.

   b) Montrer que $(e_2; e_1 - e_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$.
3. Écrire la matrice A de f_a relativement à la base $\mathscr{B}$ et calculer A^2. En déduire $f_a \circ f_a$.
4. On pose $e'_1 = f_a(e_1)$; $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$.

   a) Montrer que $(e'_1; e'_2; e'_3)$ est une base de E.

   b) Déterminer la matrice A' de f_a dans cette base.

   c) En déduire que 0 est la seule valeur propre de A. La matrice A est-elle inversible ? diagonalisable ?
5. Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI_3$, où I_3 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

   a) Justifier que la matrice $B(x)$ est inversible pour tout x non nul.

   b) Exprimer $(A - xI_3)(A + xI_3)$ puis $(B(x))^{-1}$ en fonction de x ; I_3 et A.

   c) Pour tout entier naturel n, exprimer $(B(x))^n$ en fonction de x ; n ; I_3 et A.

73 Dérivation discrète sur $\mathbf{R}_n[X]$

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soient n et p deux entiers naturels. Par convention, on posera $0^0 = 1$.

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_{n,p} = \sum\limits_{k=0}^{p} k^n$.

Partie 1 : partie mathématique

1. On considère l'ensemble $E_{n+1} = \{P \in \mathbf{R}_{n+1}[X] \mid P(0) = 0\}$.
   Montrer que E_{n+1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_{n+1}[X]$ et que $\mathcal{C}_n = \left(X, X^2, \cdots, X^{n+1}\right)$ en est une base.
2. On considère l'application φ_n définie par : $\forall P \in E_{n+1}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\varphi_n(P)(x) = P(x+1) - P(x)$.
   Montrer que φ_n est linéaire et que : $\forall P \in E_{n+1}$, $\varphi_n(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.
3. Soit M_n la matrice de φ_n dans les bases $\mathcal{C}_n$ de E_{n+1} et $\mathcal{B}_n = \left(1, X, X^2, \cdots, X^n\right)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.
   Déterminer le coefficient m_{ij} de la matrice M_n en fonction de i et j.
   Expliciter la matrice M_3.
4. L'application φ_n est-elle bijective ?
5. Soit Q_n un polynôme de E_{n+1} tel que $\varphi_n(Q_n) = X^n$.
   Donner une expression de $S_{n,p}$ en fonction de Q_n et p.

Partie 2 : partie informatique

Pour tout $(i, j) \in \mathbf{N}^2$ tel que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$, on pose $p_{i,j} = \dbinom{j}{i-1}$.

6. Soit $j \in [\![1, n+1]\!]$. Calculer $p_{1,j}$ puis $p_{j,j}$.
7. Soit $(i, j) \in \mathbf{N}^2$ tel que $2 \leqslant i < j \leqslant n+1$.
   Donner une expression de $p_{i,j}$ en fonction de $p_{i,j-1}$ et $p_{i-1,j-1}$.
8. Écrire une fonction Python `f` prenant pour argument un entier $n \geqslant 0$ et renvoyant la matrice $P_n \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ définie par : $(P_n)_{i,j} = p_{i,j}$ si $i \leqslant j$, $(P_n)_{i,j} = 0$ sinon.

   Pour cette question, vous ne devrez pas utiliser la commande **`factorial`**.
9. On rappelle que la commande `numpy.linalg.inv(A)` renvoie, quand elle existe, l'inverse d'une matrice A.
   Expliquer ce que fait le script suivant :

```python
def g(n,p) :
    B = numpy.linalg.inv(f(n))
    s = 0
    for i in range(n+1) :
        s = s + B[i,n]*(p+1)**(i+1)
    return s
```

74 Points extrémaux d'un ensemble de matrices

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soient $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour un réel a de $[0,1]$ $M_a = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$

On note

$$E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R}), \quad \mathscr{A} = \{M_a \quad a \in [0,1]\}, \text{ et } \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix} \quad (c,d) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

On dit qu'une matrice M de $\mathscr{A}$ est *extrémale* si :

$$\forall (N,P) \in \mathscr{A}^2 \quad M = \frac{1}{2}(N+P)\mathbf{R}ightarrowM = P = N.$$

1. Ecrire une fonction Python `TestM` qui prend en argument une matrice M et qui renvoie un booléen, `True` si M appartient à $\mathscr{A}$, `False` sinon.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.
3. Stabilité de $\mathscr{A}$:
   a) Soit M_a une matrice de $\mathscr{A}$. Exprimer M_a en fonction de I_2 et J.
   b) Soient a et b de $[0,\frac{1}{2}]$, montrer que $\frac{1}{2}(M_a + M_b)$ appartient à A.
   Même question avec a et b de $[\frac{1}{2}, 1]$.
4. Points extrémaux de A :
   a) Montrer que I_2 et J sont des matrices extremales de $\mathscr{A}$.
   b) Montrer que $M_a = \frac{1}{2}(M_{2a} + J)$, en déduire que M_a n'est pas un point extremal de $\mathscr{A}$ pour $a \in]0,1[$.
   c) Conclure.
5. Montrer que pour toute matrice M de A, $1 \leq \text{rg}(M) \leq 2$.
6. Soit f un endomorphisme de E tel que $f(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$. Étudier la bijectivité de f. *On pourra commencer par étudier l'image des points extrémaux de $\mathscr{A}$ par f.*

75 Similitude de matrices aléatoires 2×2

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

1. **a)** Rappeler ce que siginifie que deux matrices A et B données sont semblables.

b) Soit A, D, B trois matrices carrées de même format telles que A et B soient semblables à D. Montrer alors que A et B sont semblables.

2. **a)** Soit A et B deux matrices 2×2 à coefficients réels. On suppose que A possède 2 valeurs propres réelles distinctes λ, μ. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a1) A et B sont semblables.

(a2) B admet deux valeurs propres distinctes qui sont λ et μ.

3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, et de loi la loi géométrique sur $\mathbf{N}^\star$ de paramètre p. Quelle est la probabilité que les matrices $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables ?

4. Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels possédant deux valeurs propres réelles distinctes. Écrire un programme en Python qui prend la matrice A en entrée et renvoie en sortie la liste : `[[a1,u1],[a2,u2]]` où $\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2$ sont les deux valeurs propres de A et $\mathtt{u}_1, \mathtt{u}_2$ des vecteurs propres associés. (Indication : ne pas oublier qu'une ligne d'une matrice n'est pas toujours non nulle !).

Probabilités

76 Tie-Break entre Alain et Bertrand

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Deux joueurs A et B jouent au ping-pong : A gagne chaque manche avec la probabilité $p \in]0,1[$ donnée, et B avec la probabilité $q = 1 - p$. Un joueur est déclaré gagnant du match dès qu'il a gagné deux manches de plus que son adversaire.
Soit X le nombre de manches gagnées par Alain à l'issue des deux premières manches.
On note Ga l'événement « Alain gagne le match »et Gb l'événement « Bertrand gagne le match ».

1. a) Déterminer la loi de X.
   b) En utilisant la variable aléatoire X, démontrer que $P(Ga) = 2pqP(Ga) + p^2$.
   En déduire la probabilité $P(Ga)$.
   c) Calculer de même la probabilité $P(Gb)$.
   d) Quelle est la probabilité que la partie ne se finisse pas ?
2. a) Écrire une fonction qui permet de simuler une manche entre les deux joueurs, puis un match.
   b) Écrire une fonction qui permet de donner expérimentalement la probabilité de Ga.
   Représenter sur $[0,1]$, la fonction qui à p associe cette probabilité expérimentale et la comparer avec la courbe théorique.
3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de manches nécessaires pour que la partie s'arrête.
   a) Montrer que $P(Y = n) = 2pqP(Y = n - 2)$ pour tout entier $n \geqslant 4$.
   b) On admet que Y admet une espérance. En utilsant la relation précédente, déterminer $E(Y)$ en fonction de p et q.

77 Tirages successifs avec remise variable

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $c > 0$ un entier naturel. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire indiscernables au toucher. On joue avec l'urne de la manière suivante :

— On appelle *manche* le tirage d'une boule au hasard dans l'urne.
— Le jeu consiste en une suite de manches (éventuellement finie).
— À chaque manche, la règle est la même :
  1. On tire une boule au hasard de l'urne.
  2. Si la boule tirée est noire, le jeu est terminé. Il n'y a plus de manche.
  3. Si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne, et l'on y ajoute en plus c boules blanches. On joue alors une nouvelle manche.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les événements :
U_n : «on s'arrête d'effectuer des tirages à l'issue de la n-ième manche». On note $u_n = P(U_n)$.
V_n : «on obtient une boule blanche à chacune des n premières manches». On note $v_n = P(V_n)$.
B_n : «le n-ème tirage donne une boule blanche».
Enfin, on définit l'événement J : «le jeu s'arrête».

1. Écrire une fonction `simul(n,c)` qui prend en entrée un nombre de tirages `n` et renvoie en sortie une composition de l'urne au bout de `n` tirages suivant les règles du jeu. On pourra représenter l'urne par une liste de `0` et de `1`.
2. **a)** Exprimer l'évènement U_n à l'aide des évenements B_j, $1 \leq j \leq n$.

   b) En déduire que la série de terme général u_n converge et que $P(J) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
3. **a)** Exprimer pour tout entier $n \geq 1$ l'évènement V_n en fonction des évènements B_j, $1 \leq j \leq n$.

   b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est monotone.

   c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Soit ℓ sa limite.

   d) Montrer que $0 \leq \ell \leq 1/2$.
4. **a)** Soit $n \geq 1$ un entier. Exprimer l'évènement $\overline{V_n}$ à l'aide des évènements de la suite $(U_k)_{k\geq 1}$.

   b) En déduire que $1 - \ell = P(J)$.
5. **a)** À l'aide de la formule des probabilités composées, montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad v_n = \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{1+kc}{2+kc}$.

   b) En déduire que $-\ln v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w_k \quad$ où $\quad w_k \ln\left(1 + \dfrac{1}{1+kc}\right)$

   c) Étudier la nature de la série de terme général w_n, puis la limite de la suite (v_n).

   d) Calculer $P(J)$ et qualifier cet évènement.

78 Amende dans le bus

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

À Rennes, le STAR pratique les tarifs suivants : le ticket coûte 1 euro 50, les amendes sont fixées à 15 euros pour la première infraction constatée, 30 euros pour la deuxième et 300 euros pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur de se faire contrôler au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie. Un fraudeur décide de voyager sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter de frauder ensuite. On suppose que les descentes de contrôleurs sont mutuellement indépendantes.

Pour tout entier $k \geq 1$,on note S_k l'évènement : «la deuxième infraction est constatée au trajet numéro k». On pose $q = 1 - p$.

1. Montrer que
$$\forall k \geq 2 \quad P(S_k) = (k-1)p^2 q^{k-2}$$
2. Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on veut calculer la probabilité de l'évènement : C_n : «au bout du n-ème trajet, le voyageur a été contrôlé au plus une fois.»
   a) Soit x un réel. Donner l'expression de la somme de la série $\sum_{k \geq n+1} x^{k-1}$ en précisant les conditions de convergence.
   b) En admettant qu'on peut dériver la série terme à terme par rapport à x, calculer $P(C_n)$.
   Réponse : Si on pose $F_n(x) = \sum_{k \geq n+1} x^{k-1}$, *alors* $F_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x}$, *et* $F_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1} - (n-1)x^n}{(1-x)^2}$ *et* $P(C_n) = p^2 F_n'(q) = nq^{n-1} - (n-1)q^n = q^{n-1}(np+q)$
3. On considère l'évènement C_{31}.
   a) Pourquoi s'intéresse-t-on à la valeur $n = 31$?
   b) Programmer un script **Python** permettant de calculer numériquement $P(C_{31})$ pour $p = 1/10$ et $p = 1/20$.
   c) D'un point de vue purement financier, que conseiller à notre voyageur ?

79 Lancers de dés et apparition du premier 1

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On dispose d'un dé non pipé. On effectue des lancers successifs. Les tirages sont supposés mutuellement indépendants. Pour tout entier $k \in \mathbf{N}^\star$, on note A_k l'évènement : au k-ème tirage, le dé amène un 1.

1. la fonction **`randint(a,b)`** du module **`random`** de **`Python`** renvoie un entier choisi au hasard dans $\{a \dots b\}$. Créer une fonction **simule()** qui ne prend aucun argument en entrée et renvoie en sortie le rang d'apparition du premier 1.
2. Calculer la probabilité de l'évènement A_k pour tout entier $k \in \mathbf{N}^\star$.
3. Soit $m > 0$. Calculer la probabilité de l'evènement B_m : «à l'issue du m-ème lancer, on n'a toujours pas observé de 1.»
4. Le but de la question suivante est de montrer que l'évènement Z : «les tirages se font sans jamais observer le 1» est quasi-impossible.
   - **a)** *Exprimer l'évènement Z en termes des évènements B_m.*
   - **b)** Calculer $P\left(\overline{Z}\right)$.
   - **c)** *Conclure. Au passage, que dire de la famille d'événements $(A_n)_{n\geq 1}$?*

80 Échange de boules entre deux urnes

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $N > 1$ un entier naturel, et soit $m \in \{1 \dots N-1\}$.

On dispose de deux urnes notées U_A et U_B. Dans l'urne U_A il y a $N-1$ boules blanches et une boule noire, tandis que dans l'urne U_B, il y a N boules blanches.

On appelle *échange* l'opération qui consiste à extraire une poignée p_A de m boules dans U_A, une poignée p_B de m boules dans U_B, puis de remettre la poignée p_A (resp. p_B) dans U_B (resp. U_A).

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'échanges nécessaires pour que la boule noire passe dans l'urne B et revienne dans l'urne A.

1. Préciser l'espace image de la variable aléatoire X.
2. Montrer que la probablité qu'une poignée de m boules initialement prélevée dans U_A contienne la boule noire vaut $\alpha = \dfrac{m}{N}$.
3. Calculer $P(X=2)$.
4. Donner par simulation une valeur approchée de $E(X)$.
5. On définit l' événement H : « Après le 1er échange, la boule noire est dans l'urne A ». À l'aide du système complet d'évènements $(H, \overline{H})$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad P(X=n+1) = \frac{N-m}{N} P(X=n) + \left(\frac{m}{N}\right)^2 \left(\frac{N-m}{N}\right)^{n-1}$$

6. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$\forall n \geq 2 \quad v_n = \left(\frac{N}{N-m}\right)^{n+1} P(X=n)$$

est arithmétique, et préciser sa raison.

7. En déduire la loi de X.

81 Tirages successifs dans des urnes aléatoires

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $N \in \mathbf{N}^\star$ et $n \in \mathbf{N}^\star$. On considère $N+1$ urnes numérotées de 0 à N.

Pour tout entier $k \in \{0 \dots N\}$, l'urne k contient exactement k boules rouges et $N-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne, puis on y effectue $n+1$ tirages successifs avec remise.

Pour tout entier $j \in \{1 \dots n+1\}$ on note R_j l'évènement «Le j-ème tirage amène une boule rouge.»

1. **a)** Calculer $P(R_1)$, et plus généralement, $P(R_j)$ pour tout entier j dans $\{1 \dots n+1\}$.

   b) Soit $i \neq j$ deux entiers dans $\{1 \dots n+1\}$. Étudier l'indépendance des évènements R_j et R_j.

   c) On observe que tous les tirages amènent du noir. Calculer la probabilité que l'on ait joué avec l'urne k.

2. Soit p_n la probabilité que la dernière boule tirée soit rouge sachant que les n premières le sont.

   a) Exprimer p_n en termes de somme.

   b) Calculer la limite de p_n quand $n \to \infty$.

3. Proposer une fonction `simul(N,k,n)` en **Python** qui prend entrée les entiers N, k, n comme dans l'énoncé et qui renvoie en sortie un entier égal au nombre de boules rouges obtenues en effectuant r tirages successifs avec remise dans l'urne k. Indication : la commande `randint(a,b)` du module `random` prend deux entiers et renvoie en sortie un entier tiré au hasard dans $\{a \dots b\}$.

82 Remplacement de boules dans une urne et tirages

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $N \in \mathbf{N}^\star$. Une urne contient N boules noires. On choisit au hasard un entier naturel $k \in \{1 \dots N\}$. Puis on remplace k boules de l'urne par des boules blanches. Enfin, on tire une boule au hasard dans l'urne.

1. Proposer un programme en **Python** qui simule cette expérience. La fonction `randint` du module `random` prend en entrée deux entiers `a` et `b` et renvoie en sortie un entier pris au hasard dans $\{\mathtt{a} \dots \mathtt{b}\}$.
2. **a)** Soit B : «la boule tirée est blanche». Calculer $P(B)$.

   b) On tire une boule, elle est blanche. Calculer pour tout entier k dans $\{1 \dots N\}$ la probabilité que l'on ait remplacé exactement k boules dans l'urne. Ce dernier évènement est noté R_k.
3. Dans cette question, l'urne contient $N-1$ boules noires et une blanche : c'est sa composition initiale. Puis on effectue un remplacement de boules comme expliqué en préambule et enfin un tirage.

   a) Soit C l'évènement : «la boule blanche fait partie des k boules remplacées». Calculer $P(C|R_k)$.

   b) En déduire la probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'exactement k boules ont été remplacées.

   c) En déduire $P(C)$.

83 Tirages successifs avec remise d'une quantité constante de boules

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit c un entier naturel.

Une urne contient 2 boules blanches et 2 boules noires, on y effectue un premier tirage, puis on suit le protocole suivant :

Si la boule obtenue est noire, on la remet dans l'urne, on ajoute c boules noires, et on effectue un nouveau tirage,

si la boule obtenue est blanche, on s'arrête.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on note E_n l'événement " Les n-ers tirages ont lieu, et ils n'ont donné que des boules noires"

X est la variable aléatoire donnant le numéro du tirage d'apparition de la première boule blanche, lorsqu'il en apparaît une, et prenant la valeur 0 sinon.

1. Cas $c = 0$: Donner la loi de X.
2. Cas général : Déterminer $P(X = 3)$ en fonction de c.
3. Ecrire une fonction Python prenant en argument, les entiers c et s, renvoyant en sortie les résultats d'une simulation avec au plus s tirages et la valeur de X. (X sera nul, lorsque aucune boule blanche ne sera sortie au cours des s tirages)
4. Ecrire une fonction Python prenant en argument un entier c et qui renvoie une valeur approchée de la probabilité $P(X = 0)$.

   La tester pour $c = 1, c = 2$ puis $c = 5$.
5. Prouver : $P(E_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2 + kc}{4 + kc}$.
6. Cas $c = 1$:
   - **a)** Déterminer pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la valeur de$P(E_n)$, puis en déduire $P(X = 0)$.
   - **b)** Montrer : $P(X = n) = \dfrac{12}{(n+3)(n+2)(n+1)}$.
   - **c)** Avec le théorème de transfert, prouver que $X + 3$ admet une espérance et la calculer.

     En déduire l'espérance de X.
   - **d)** utiliser la fonction Python du 3- pour vérifier ce résultat à l'aide de simulations.

84 Urne tricolore de contenu décroissant

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Sout b, n deux entiers strictement positifs et $r \in \mathbf{N}$. Une urne contient intialement b boules blanches, n boules noires et r boules rouges. Le jeu est le suivant :

— On tire une boule.
— Si elle est blanche, la partie est gagnée et s'arrête.
— Si elle noire, la partie est perdu et on s'arrête.
— Si elle est rouge, on la retire de l'urne et on effectue un nouveau tirage avec les règles du jeu précédemment énoncés.

Pour $r \in \mathbf{N}$ on note G_r l'évènement : «il existe un tour de jeu auquel l'urne contient r boules rouges et le jeu termine sur une victoire du joueur».

1. Calculer $P(G_0)$ et $P(G_1)$.
2. Donner une relation de récurrence liant $P(G_r)$ et $P(G_{r-1})$.
3. **a)** Écrire une fonction **Python** prenant en entrée les entiers **n**,**b** et donnant les valeurs de $P(G_r)$ pour $r \in \{0 \dots 10\}$.

   b) Quelle conjecture faire ?
4. Calculer $P(G_r)$.

85 Lancers d'une pièce truquée jusqu'au motif `Pile-Face`

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère une suite infinie de lancers supposés mutuellement indépendants d'une pièce truquée donnant `pile` avec une probabilité constante $p \in]0, 1[$, et $p \neq 1/2$. On notera $q = 1 - p$.

1. Simuler une suite de lancers d'une telle pièce en **`Python`** renvoyant le premier rang n tel que les lancers numéro $n-1$ et n donnent la séquence `pile-face` (ainsi, le lancer n a donné `face`).
2. Soit $n \geq 2$ un entier. On note S_n l'évènement : «La séquence `pile-face` apparaît pour la première fois aux rangs $n-1$ et n», et pour tout entier j, F_j : «le j-ème lancer amène `face`».
   - **a)** Soit k un entier quelconque. Exprimer l'évènement : A_k : «S_n est observé, et lors des $n-2$ premiers lancers, il y a exactement k faces» en fonction des F_j, $\overline{F_j}$.
   - **b)** Exprimer l'évènement S_n en termes des A_k.
   - **c)** En déduire la probabilité que la séquence `pile-face` apparaisse pour la première fois aux lancers $n-1$ et n.
3. Calculer la probabilité que la séquence `pile-face` apparaisse au moins une fois ?
4. Calculer la probabilité que la séquence `pile-pile` apparaisse sans avoir jamais vu la séquence `pile-face` auparavant.

86 Suite infinie d'urnes et pile ou face

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère un jeu dans lequel :
- On dispose d'une suite d'urnes $U_1, U_2, \dots$. Pour tout entier $k \geq 1$, l'urne k contient k boules dont une seule blanche.
- On lance plusieurs fois une pièce de monnaie et on note le rang n d'apparition du premier face dans la série de lancers.
- Ensuite, on tire une boule au hasard dans l'urne n.

On note B l'évènement : à l'issue du jeu, on a tiré une boule blanche.

1. On note Z l'évènement : la pièce ne fait jamais face, et pour tout entier $k > 0$, on note F_k l'évènement : «le k-ème lancer donne face». Soit enfin pour tout entier k, Q_k l'évènement : «les k premiers lancers de pièce donnent pile».
   a)
   b) Montrer que pour tout entier $k > 0$, $Z \subset Q_k$.
   c) Exprimer Q_k en fonction des F_j
   d) En déduire que l'évènement Z est quasi-impossible.
2. Soit J_k l'évènement : «On joue avec l'urne k». Calculer $P(J_k)$. En déduire une expression de $P(B)$ sous forme de somme qu'on ne cherchera pas à calculer.
3. **a)** Soit $x \in [-1, 1[$ un réel. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$
   b) Montrer que pour tout réel x dans $[-1, 1[$ on a :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0.$$
   c) En déduire la valeur de $P(B)$.
4. Proposer une fonction **Python** simulant cette expérience aléatoire. Elle renverra en sortie une phrase comme `"boule tirée blanche"` si la simulation produit une boule blanche et sinon une phrase comme `"pas de boule blanche"`. Indication : la fonction `randint(a,b)` du module `random` prend en entrée deux entiers a, b et renvoie en sortie un entier tiré au hasard dans $\{a, \dots, b\}$.

87 Modèle descriptif de trajets de fourmis

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On étudie le cheminement des fourmis. Elles ont le choix entre le chemin A et le chemin B. Chaque fourmi dépose lors de son trajet une quantité de phéromones. Les quantités de phéromones sur les chemins A et B sont $\alpha_0 = \beta_0 = 1$.

On considère dans cette modélisation qu'après une fourmi soit passée sur un chemin, la nouvelle quantité de phéromones présentes sur ce chemin est égale à l'ancienne quantité multipliée par r.

Pour n de $\mathbf{N}^*$, on note A_n(resp. B_n) l'événement "La fourmi a choisi le chemin A(resp. B), lors du trajet n", α_n et β_n les quantités de phéromones sur les chemins A et B après le trajet n.

On considère que la fourmi choisit un chemin en fonction de la quantité de phéromones présente sur le chemin A ou B.

Ainsi, on considère : $P_{((\alpha_n=a)\cap(\beta_n=b))}(A_{n+1}) = \dfrac{a}{a+b}$ et $P_{((\alpha_n=a)\cap(\beta_n=b))}(B_{n+1}) = \dfrac{b}{a+b}$.

On note X_n la variable aléatoire comptant le nombre de fourmis ayant emprunté le chemin A après les n trajets.

1. Donner les lois de probabilité des variables X_1, X_2 et X_3.
2. Ecrire une fonction Python **simX** qui prend en argument d'entrée l'entier n=nombre de trajets, et le réel r, qui effectue une simulation de l'expérience et qui renvoie la valeur de X_n.
3. Ecrire une fonction Python **loiX** qui prend en argument d'entrée l'entier n=nombre de trajets, et le réel r, qui effectue une simulation de l'expérience et qui renvoie les valeurs approchées des probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \dots P(X_n = n)$ (10000 simulations).

   Tracer un diagramme en bâton représentant la loi de probabilité de X_n obtenue ainsi.
4. déterminer $P(X_n = n)$, on ne cherchera pas à simplifier l'expression.
5. Soients $(p_n)_p$ et $(q_n)_n$ deux suites réelles vérifiant : pour tout n,

   $p_n = \dfrac{r}{1+r}\dfrac{r^2}{1+r^2}\cdots\dfrac{r^n}{1+r^n}$ et $q_n = \left(1-\dfrac{1}{1+r}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+r^3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{1+r^{2n+1}}\right)$.

   Montrer que ces deux suites convergent et donner leurs limites.
6. On admet que ces deux suites représentent respectivement....

   Quelles interprétations faîtes-vous ? Lien avec la fonction Python ?

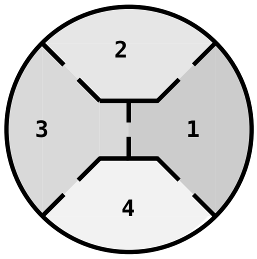
88 Chaîne de Markov à 4 états

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Quel est le rang de A ? En déduire une valeur propre de A et le sous-espace propre associé.
2. Calculer la somme des coefficients de chaque colonne de A et en déduire une valeur propre de A ainsi qu'un vecteur propre associé.
3. On pose $C = {}^t(1, -1, 1, -1)$. Calculer AC.
4. Conclure sur la diagonalisabilité de A, et donner le cas échéant une matrice P diagonalisant A en une matrice D à préciser.
5. La fonction `eigvals` du module **`numpy.linalg`** prend en entrée une matrice `A` (représentée par un tableau 2-dimensionnel) et renvoie en sortie la matrice 1-dimensionnelle contenant les valeurs propres de `A`.
   a) Vérifier que les valeurs propres calculées pour la matrice A de l'énoncé sont en accord avec les résultats informatiques.
   b) La commande `np.dot(M,N)` calcule le produit matriciel MN de deux matrices.
   Écrire une fonction `Puissance(A,n)` qui prend en entrée une matrice A et renvoie en sortie la matrice A^n.
   c) Expérimenter pour différentes valeurs d'une colonne $U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ les valeurs de A^nU pour n grand.
6. *On réalise l'expérience suivante : on place une souris dans une enceinte circulaire composée de 4 cellules numérotées 1,2,3,4. Les cellules communiquent entre elles par des accés comme indiqué sur la figure ci-dessous.*



On utilise un métronome. À chaque « tip »du métronome, qui correspond à l'unité de temps choisie pour l'expérience, la souris change (éventuellement) de cellule . Ses choix obéissent aux règles suivantes :

a) *(R1) Pour tout entier $n \geq 0$, le déplacement à l'instant $n+1$ ne dépend que de la position de la souris à l'instant précédent n (pas de mémoire des déplacements antérieurs).*
b) *(R2) Si la souris occupe une cellule de numéro pair à la date n, elle quitte sa cellule pour toute autre cellule accessible et adjacente. Les choix sont équiprobables.*
c) *(R2bis) Si toutefois la souris occupe une cellule de numéro impair à la date n, la souris peut à la date $n+1$ occuper toute autre cellule accessible adjacente, ou rester dans la cellule occupée à la date n pour se reposer. Tous ces choix sont équiprobables.*

Pour tout entier $n \geq 0$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro de la cellule occupée par la souris à la date n.

a) En notant $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$ la colonne de la loi de X_n, déduire une matrice $T \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ telle que pour tout entier n on ait : $U_{n+1} = TU_n$. Donner une relation simple entre A et T. En déduire U_n en fonction de A et U_0.

b) Si Z est un vecteur propre de A, calculer $A^n Z$ pour tout entier n en fonction de Z et n.

c) En déduire les limites quand $n \to \infty$ des coefficients de U_n. Interpréter.

89 Obtention de la première séquence Rouge-Blanc

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère une urne qui contient 2 boules, l'une blanche, et l'autre. On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise.

Pour tout entier $k \geq 1$, on définit les événements :

R_k : «On obtient la boule rouge au tirage k» et B_k =« On obtient la boule blanche au tirage k».

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur k lorsqu'on obtient pour la 1ère fois la séquence «Rouge-Blanc» telle que la boule rouge apparaît au tirage $k-1$ et la boule blanche au tirage k. On convient que si cette séquence n'arrive jamais, la variable X prend la valeur 0.

1. Déterminer $X(\Omega)$, puis calculer $P(X=2)$.
2. Décrire l'événement $(X=3)$, et donner sa probabilité.
3. Écrire une fonction Python qui effectue une simulation de l'expérience et renvoie une valeur de X.
4. Écrire une fonction Python qui renvoie une valeur approchée de l'espérance de X.
5. Montrer que si on obtient une boule rouge au 1er tirage, alors l'événement $R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_{k-1} \cap B_k$ a lieu si et seulement si l'événement $(X=k)$ a lieu.
6. Montrer pour tout $k \geq 3$, $P(X=k) = \dfrac{1}{2}P(X=k-1) + \dfrac{1}{2^k}$.
7. Montrer que la suite $(u_k)_k$ définie par $u_k = 2^k P(X=k)$ est une suite arithmétique, en déduire $P(X=k)$ pour tout $k \geq 2$.
8. Déterminer $P(X=0)$.
9. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
   Confronter votre résultat avec celui obtenu en 4-.

90 Jeu à deux joueurs et calcul de gain

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \in \mathbf{N}^{\star}$. Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant :

— A donne 3 euros à B. Ensuite, A lance un dé équilibré à n faces, numérotées de 1 à n.
On note X la variable aléatoire égale à la valeur obtenue par le joueur A.

— Ensuite B lance le même dé, jusqu'à ce qu'il obtienne une valeur supérieure ou égale à celle obtenue par A. Pour chaque lancer effectué par B, celui donne 1 euro à A.

On note M la variable aléatoire égale au montant versé par B à A.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Écrire une fonction Python qui prend en argument l'entier n, qui effectue une simulation de l'expérience et qui renvoie en sortant la valeur de M.
3. Pour tout $j \geq 1$, calculer la probabilité conditionnelle de $(M = j)$ sachant $(X = 1)$.
4. Pour tout $j \geq 1$, et pour tout $k \geq 1$, calculer la probabilité conditionnelle de $(M = j)$ sachant $(X = k)$, puis la probabilité conditionnelle de $(M \geq j)$ sachant $(X = k)$ en fonction de n, j, k.
5. En déduire : Pour tout $j \geq 1$, $P(M \geq j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^{j-1}$.
6. On admet que M, notée maintenant M_n admet une espérance et $E(M_n) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(M \geq i)$.

   Montrer $E(M_n) = \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n-(i-1)}$.
7. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} E(M_n)$.
8. Dans cette question, le joueur A ne donne plus 3 euros à B, mais il lui donne X euros.
   On note G le gain algébrique du joueur B (c'est-à-dire, gain positif ou négatif).
   a) Écrire une fonction **`Python`**, qui prend en argument l'entier n, et qui renvoie la valeur du gain G.
   La tester pour différentes valeurs de n. Que remarque-t-on pour $n = 2$?
   b) Calculer l'espérance du gain, et confronter votre résultat à la conjecture du a-.

91 Variable de Poisson

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page* *(p. 156)* *de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

C'est l'anniversaire de la petite chienne Cybèle, et ses amis humains viennent lui présenter leurs voeux. On suppose que le nombre N de personnes ayant fait le déplacement pour cet évènement est variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour remercier ses fans, Cybèle mord ses visiteurs avec une probabilité $p > 0$, les morsures étant supposées mutuellement indépendantes.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de visiteurs de Cybèle qu'elle a mordus.
   - **a)** Simuler la variable X sous **`Python`**. *Indication : on pourra soit simuler une variable de poisson, soit simuler une loi binomiale bien choisie en justifiant par un théorème limite.*
   - **b)** Déterminer la loi de X.
2. Soit Y le nombre de visiteurs non mordus.
   - **a)** Déterminer la loi de Y.
   - **b)** Vérifier que les évènements $P(X = m)$ et $P(Y = n)$ sont indépendants pour tout couple d'entiers m, n.

92 Usagers d'ascenseur étranges

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, et $p \geq 2$ un entier. Un immeuble est haut de p étages, et est équipé d'un ascenseur ; n personnes montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée et descendent chacune à un étage choisi *au hasard* (en appuyant sur le bouton correspondant pour ceux qui auraient des doutes).

Soit X la VAR égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur. On pose $q = 1 - \dfrac{1}{p}$. Soit Y_{ij} la VAR de Bernoulli égale à 1 si j-ème passager descend au i-ème étage et X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au i-ème étage.

1. **a)** Déterminer les lois de Y_{ij} et de X_i.
   b) En déduire $E(X)$.
2. Simuler l'expérience en **`Python`** (le script doit renvoyer une réalisation de la variable X).

93 Lancers de pièce et élimination de la brebis galeuse

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n > 2$ un entier. Dans une assemblée de n brebis, tout le monde lance simultanément une pièce. Si toutes les pièces tombent du même côté sauf une, la brebis propriétaire de cette dernière est déclarée brebis galeuse. Soit X la VAR égale au nombre de parties nécessaires pour qu'il y ait une brebis galeuse.

1. Simuler sous **`Python`** une réalisation de cette expérience renvoyant le nombre de lancers nécessaires à l'apparition d'une brebis galeuse
2. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête au premier lancer ?
3. **a)** Déterminer la loi de X.

   b) Calculer espérance et variance de X (et justifier leur existence éventuelle).

94 Loi de Pascal, loi binomiale négative

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit r un entier naturel non nul. Une urne contient des boules indiscernables au toucher blanches et noires. La proportion de boules blanches est notée $p \in]0,1[$, et on pose $q = 1 - p$. On effectue des tirages successifs avec remise, les tirages étant numérotés dans $\mathbf{N}^\star$.

On note X_r la VAR égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir r boules blanches pour la première fois et à 0 si l'on n'obtient jamais r boules blanches.

De même, on définit la VAR Z_r égale au nombre de boules noires tirées avant l'obtention des r boules blanches et à -1 si on n'obtient jamais r boules blanches.

1. Simuler la variable X_r sous **Python**.
2. Montrer que l'évènement $X_r = 0$ est quasi-impossible.
3. Déterminer la loi de X_r (appelée loi de Pascal de paramètres (r, p)). En déduire :

$$\forall r \in \mathbf{N}^\star \quad \sum_{k=r-1}^{+\infty} \binom{k-1}{r-1} q^{k-r} = \frac{1}{p^r}.$$

4. Montrer que X_r admet une espérance et la calculer.
5. Même question avec la variance.
6. Trouver une relation entre X_r et Z_r (la varibale Z_r suit ce qu'on appelle une loi binomiale négative de paramètres (r, p)).
7. En déduire la loi de Z_r et calculer (en justifiant l'existence si besoin est) ses espérance et variance.

95 Commerçant pas mauvais en maths

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Un commerçant qui doit avoir des notions de probabilités estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad P(X = n) = \frac{p^n}{(1+p)^{n+1}}$$

où $p > 0$ est le prix de la dernière campagne publicitaire du produit.

1. Simuler en **Python** une réalisation de la variable X. *On pourra utiliser la fonction de répartition de X et remarquer une simple relation de récurrence entre $P(X = k+1)$ et $P(X = k)$.*
2. Vérifier que X est bien une variable aléatoire.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.
4. On note $s > 0$ le stock du commerçant. Calculer la probabilité d'une rupture de stock.

96 Nombres de tirages nécessaires pour la première série bicolore

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $p \in]0;1[$. Une urne contient des boules noires en proportion p et des boules blanches en proportion $1-p=q$. On effectue dans cette urne des tirages successifs avec remise.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir les deux couleurs.

Soit pour $n \in \mathbf{N}^\star$ B_n l'évènement : « la boule obtenue au n -ème tirage est blanche».

1. Soit M l'évènement : «on obtient des tirages unicolores».
   a) Justifier que : $\forall n \in \mathbf{N}^\star : P(M) \leq p^n + q^n$.
   b) En déduire la valeur de $P(M)$.
2. Écrire en **Python** une fonction `X(p)` permettant de simuler la variable aléatoire X.
3. Déterminer la loi de X.
4. Justifier que X admet une espérance et la calculer.
5. Justifier que X admet une variance et la calculer.

97 Extraction sans remise de paires de jetons identiques d'une urne

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Une urne contient 2 lots de n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément de l'urne deux jetons. Si les deux jetons tirés portent le même numéro, on les élimine de l'urne. Sinon, on les y remet. Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Déterminer la loi de T_1.

2. **a)** Montrer que pour tout entier $k \geq 2$:

$$P(T_2 = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}.$$

b) Vérifier ensuite que l'on a bien une variable aléatoire.

c) Montrer que T_2 admet une espérance et la calculer.

3. **a)** Écrire une fonction **Python** `tirage(U)` simulant un tirage dans une urne `U` codée par une liste d'entiers, et renvoyant en sortie la nouvelle [composition de l'] urne.

b) En déduire une fonction `T(n)` permettant de simuler la variable T_n.

c) En déduire un script permettant de calculer expérimentalement l'espérance de T_2.

4. Soit C l'évènement : « On tire deux jetons identiques au premier tirage.» À l'aide de $(C, \overline{C})$, montrer que pour tous entiers k, n tels que $k \geq n \geq 2$:

$$P(T_n = k) = \frac{1}{2n-1}P(T_{n-1} = k-1) + \frac{2n-2}{2n-1}P(T_n = k-1)$$

5. On admet ici que pour tout entier $n > 0$, la variable T_n admet une espérance. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall n\, ge2 \quad E(T_n) = E(T_{n-1}) + 2n - 1.$$

Montrer ensuite que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad E(T_n) = n^2.$$

6. **a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$P(T_n = n) = \frac{1}{(2n-1) \times \cdots \times 5 \times 3 \times 1}$$

b) Déduire de cette valeur et de la relation de la question **4.** un programme permettant de calculer $P(T_n = k)$ pour tout couple d'entiers (k, n) tels que $k \geq n \geq 2$ (un programme récusif est autorisé !).

98 Obtention pour la première fois de trois tirages consécutifs égaux

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p.* *156**) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Une urne contient trois boules numérotées respectivement 1, 2, 3 et sont supposées indiscernables au toucher.

On effectue des tirages successifs avec remise, ces derniers étant supposés indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages juste nécessaires pour obtenir pour la première fois trois fois de suite le même numéro. On pose :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad p_n = P(X = n) \quad \text{et} \quad c_n = P(X \leq n).$$

1. Simuler cette expérience en **Python**.
2. **a)** Calculer p_i pour $i \leq 4$.
   b) Trouver une relation entre p_n, c_n et c_{n-1} valable pour tout entier $n \geq 2$.
   c) Montrer que : $\forall n \geq 1 \ p_{n+3} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^3(1 - c_n)$
   d) En déduire que : $\forall n \geq 2 \quad p_{n+3} - p_{n+2} = -\frac{2}{27}p_n$.
3. **a)** Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $k_n = p_{n+2} - \frac{2}{3}p_{n+1} - \frac{2}{9}p_n$. Vérifier que la suite (k_n) est nulle.
   b) En déduire que $\forall n \geq 2 \quad p_n = \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-2}\right)$.
4. Montrer que la série de terme général p_n converge et calculer sa somme.

   Un calcul donnerait que $E(X) = 13$. Justifier l'existence de $E(X)$ et obtenir informatiquement une valeur approchée de $E(X)$.

99 Ajout d'une dans une urne initialement bicolore

a) `Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

A. Analyse

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Rappeler la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.
2. Soit k un entier naturel. Montrer :
$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$$
En déduire :
$$1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt$$
3. Montrer : $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
En déduire un équivalent de S_n, pour n au voisinage de $+\infty$.

B. Probabilités

Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On tire successivement une boule avec remise et on ajoute après chaque tirage une boule noire dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire donnant le numéro du tirage d'apparition de la première boule noire, et Y la variable aléatoire donnant le numéro du tirage d'apparition de la première boule blanche.

1. Écrire une fonction Python effectuant une simulation de l'expérience et qui renvoie la valeur de X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
4. Déterminer la loi de probabilité de Y.
5. Étudier l'existence de l'espérance et la variance de Y.
6. Donner un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^{n} kP(Y = k)$ pour n au voisinage de $+\infty$.

100 Moments de la loi normale

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Pour tout entier naturel k, on note $m_k = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de m_0. On pourra utiliser que $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ pour $t \geq 1$.
2. Justifier l'existence de m_1, et calculer m_1.
3. Programmer sous Python une fonction qui prend en argument un entier k et retourne une valeur approchée de m_k.
4. **a)** Montrer que : $\forall k \geqslant 0$ m_k existe, et $m_k = (k-1)\, m_{k-2}$.
   b) En déduire r les valeurs de m_{2k+1} et pour $k \geqslant 0$.
   c) De même calculer les valeurs de m_{2k} et pour $k \geqslant 0$. On admet que $m_0 = 1$
5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \ln(m_{2n})$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \ln(2n+1)$. On rappelle que $m_0 = 1$.
   b) Programmer sous Python une fonction qui renvoie les valeurs de u_n et $\dfrac{u_n}{n \ln n}$.
   c) Estimer la limite de u_n quand $n \to +\infty$.
   d) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(2k+1)$
   puis que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n \ln 2$.
   e) Montrer que u_n est équivalent à $n \ln n$.

101 Matrices aléatoires semblables

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

1. Soit A et B deux matrices 2×2 à coefficients réels. On suppose que A possède 2 valeurs propres réelles distinctes λ, μ. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) A et B sont semblables.

b) B admet deux valeurs propres distinctes qui sont λ et μ.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendant de loi la loi géométrique de paramètre p. Quelle est la probabilité que les matrices $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soient semblables ?

3. Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels possédant deux valeurs propres réelles distinctes. Écrire un programme en Python qui prend la matrice A en entrée et renvoie en sortie la liste : `[[a1,u1],[a2,u2]]` où $\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2$ sont les deux valeurs propres de A et $\mathtt{u}_1, \mathtt{u}_2$ des vecteurs propres associés. (Indication : ne pas oublier qu'une ligne d'une matrice n'est pas toujours non nulle !).

102 Loi binomiale $\mathscr{B}(N, p)$, où N est une variable aléatoire

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

C'est l'anniversaire de la petite chienne Cybèle, et ses amis humains viennent lui présenter leurs voeux. Le nombre N de personnes ayant effectué le déplacement suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour les remercier, Cybèle mord chacun d'eux avec une probabilité $p > 0$, les morsures étant supposées mutuellement indépendantes.

1. Soit X le nombre de visiteurs mordus. Déterminer la loi de X.
2. Soit Y le nombre de visiteurs non mordus.
   a) Déterminer la loi de Y.
   b) Vérifier que les évènements $P(X = m)$ et $P(Y = n)$ sont indépendants pour tout couple d'entiers m, n.
3. Simuler la variable X sous **Python**.

103 Jeu à deux joueurs

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $p \in]0;1[$ et $q = 1 - p$. Deux joueurs A et B disposent d'une pièce qui fait `Pile` avec une probabilité p et `Face` avec une probabilité q.

Le joueur A lance la pièce et il s'arrête lorsqu'il a obtenu deux piles (pas nécessairement successifs).

Il demande alors au joueur B de donner un nombre entier entre 0 et le nombre de `Face` obtenu.

On pose X la variable aléatoire égale au nombre de `Face` obtenus par le joueur A lors des lancers, Y la variable égale au nombre qui a été annoncé par le joueur B et $Z = X - Y$.

1. Écrire des fonctions **Python** permettant de simuler les variables Y et Z.
2. a) Montrer que : $\forall k \in \mathbf{N}$, $P(X = k) = (k+1)\, p^2 q^k$.
   b) En écrivant la variable $X + 2$ comme la somme de deux variables aléatoires bien choisies, montrer l'existence et calculer l'espérance et la variance de X.
3. a) Déterminer la loi de Y.
   b) Montrer que Y admet une espérance et une variance et les calculer.
   c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. a) Montrer que les variables Z et Y suivent la même loi.
   b) Les variables Z et Y sont elles indépendantes ?

104 Somme aléatoire de variables identiquement distribuées

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page* *(p. 156)* *de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $p \in]0,1[$ et (X_n) une suite de VAR aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathscr{B}(p)$. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, indépendante de la suite (X_n).

On définit une variable aléatoire Y par :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si} \quad N \neq 0 \end{cases}$$

Noter que ce n'est pas exactement une somme au sens classique : le nombre de termes de la somme est un entier aléatoire!

1. Pour le moment, on admet qu'on dispose d'une fonction `Poisson(l)` dont l'appelle renvoie une réalisation d'une variable de loi de poisson de paramètre `l`.
   Simuler la variable aléatoire Y en python.
2. Rappeler pour $r \in \mathbf{N}^\star$ la loi de $S_r = \sum_{k=1}^{r} X_r$.
3. Calculer $P(Y = r)$ pour tout entier r (on traitera séparément le cas $r = 0$).
4. Déterminer le cas échéant $E(Y)$.
5. Programmer la fonction `Poisson`.

105 Fraude dans le bus

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

À Rennes, le STAR pratique les tarifs suivants : le ticket coûte $1,5$ euros, les amendes sont fixées à 15 euros pour la première infraction constatée, 30 euros pour la deuxième et 300 euros pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur de se faire contrôler au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie. Un fraudeur décide de voyager sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter de frauder ensuite. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (ainsi T est la VAR égale au numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On pose $q = 1 - p$.

1. Montrer que la loi de T est donné par :

$$\forall k \geq 2 \quad P(T = k) = (k-1)p^2q^{k-2}$$

2. Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on veut calculer $P(T > n)$.
   a) Donner l'expression de la somme de la série $\sum\limits_{k \geq n+1} x^{k-1}$.
   b) En admettant qu'on peut dériver la série terme à terme, calculer $P(T > n)$.
3. Programmer un script **Python** permettant de calculer numériquement $P(T > 60)$ pour $p = 1/10$ et $p > 1/20$.

106 Couple de deux variables finies

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit N un entier supérieur ou égal à 3. Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, une par une et sans remise, les N boules de cette urne. Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Dans le cas où $N=10$, simuler informatiquement une expérience et afficher les valeurs prises par X_1 et X_2. On rappelle à cet effet que la fonction `random()` de la bibliothèque Python `random` renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1.
2. Soient i et j deux entiers de l'intervalle $\{1\dots N\}$. Montrer que la loi du couple $(X;Y)$ est donnée par :
$$P((X_1=i)\cap(X_2=j))=\begin{cases}0 & \text{si } 1\leq j\leq i\leq N\\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1\leq i<j\leq N\end{cases}$$
3. **a)** Justifier que les lois de X_1 et X_2 sont données par :
$$\forall k\in\{1\dots N-1\},\ P(X_1=k)=\frac{2(N-k)}{N(N-1)}\ \text{ et } \forall k\in\{2\dots N\},\ P(X_2=k)=\frac{2(k-1)}{N(N-1)}.$$
   b) Ces variables sont-elles indépendantes ?
4. Démontrer que la variable $N+1-X_2$ a même loi que X_1.
5. On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},\mathcal{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1\dots N\}$ et on désigne par D l'événement : «A ne prend pas la même valeur que B».
   a) Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $\dfrac{N-1}{N}$.
   b) On définit les variables aléatoires $Y_1=\min(A;B)$ et $Y_2=\max(A;B)$. Calculer, pour tout couple $(i;j)$ de $\{1\dots N\}$ la probabilité conditionnelle :
$$P_D((Y_1=i)\cap(Y_2=j)).$$
   c) Expliquer pourquoi le programme suivant permet de simuler des variables aléatoires qui suivent les mêmes lois que X_1 et X_2 dans le cas où $N=10$:

```python
from random import *
a= randint (1,10)
b= randint (1,10)
while a==b :
    b= randint (1,10)
print (min(a,b))
print (max(a,b))
```

107 Méthode de Monte-Carlo sur $[0, 1] \times [0, 1]$ et approximation de π

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On rappelle le théorème et la formule de convolution : si f et g sont deux densités de variables aléatoires X et Y mutuellement indépendantes, et si la fonction notée $f \star g$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

est définie en tout réel x sauf au plus en un nombre fini de points, alors :
— *La variable $X + Y$ est à densité.*
— *Une densité de $X + Y$ est $f \star g$.*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Calculer tout en montrant son existence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t$, à l'aide du changement de variables $t = \sin^2(\theta)$.
2. On pose $Z = X^2 + Y^2$.
   a) Simuler informatiquement l'événement $\{Z \leq 1\}$ pour obtenir une estimation de sa probabilité.
   b) Déterminer une densité de X^2.
   c) i) En déduire une densité de Z sous forme d'intégrale en utilisant la formule de convolution. Montrer que cette densité est constante égale à $\dfrac{\pi}{4}$ pour $0 < z < 1$.
   ii) Rappeler l'interprétation empirique de la probabilité $P(X \in [a, b])$ pour X de loi $\mathscr{U}(0, 1)$.
   iii) Comment interpréter géométriquement la probabilité $P(Z \leq 1)$?
3. Grâce à la simulation précédente, écrire un script **Python** qui calcule une valeur approchée de π.

108 Convolution de lois uniformes

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On rappelle que si X et Y son deux variables aléatoires réelles à densité de densités respectives f_X et f_Y, et indépendantes alors :

1. *$U = X + Y$ est à densité.*
2. *Une densité de U est donnée par la convolée de f_X et f_Y.*
3. *La convolée de f_X et f_Y est la fonction notée $f_X \star f_Y$ et définie par une intégrale de la façon suivante, par la formule dite de* convolution *:*

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad (f_X \star f_Y)(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$$

Romeo et Juliette, dont la flamme commence à vaciller depuis le temps, se donnent rendez-vous à 19h à la sortie d'une station de métro de la banlieue de Vérone. Chacun arrive entre 19h et 20h. Le temps (mesuré en heures) écoulé entre 19h et l'arrivée de Juliette (resp. Romeo) est une variable aléatoire X (resp. Y) qui suit une loi $\mathscr{U}(0,1)$. Les heures d'arrivées de Romeo et Juliette sont supposées mutuellement indépendantes. Chacun tolère d'attendre l'autre au maximum 10 minutes (quand je vous dis que la flamme vacille sérieusement).

1. a) Exprimer l'évènement L : «Romeo et Juliette ne se sont pas trouvés» en termes des variables aléatoires X et Y.
   b) Écrire en **Python** une fonction `lapin()` ne prenant aucun argument en entrée et renvoyant en sortie `True` si l'évènement L est observé et `False` sinon par simulation.
   c) Écrire une autre fonction permettant ensuite d'estimer la probabilité $P(L)$.
2. a) Quelle est la loi de la variable $-Y$?
   b) Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{L}$ (*On pourra commencer par calculer la loi d'une variable aléatoire bien choisie et utiliser le théorème rappelé en préambule.*)
   c) Calculer le temps moyen écoulé entre les instants d'arrivée de Romeo et Juliette.

109 Moments de la loi normale

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère une variable aléatoire X de loi normale centrée réduite.

1. Justifier l'existence et donner les valeurs des espérances $E\left(X^k\right)$ pour$k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.
2. Programmer sous Python une fonction qui prend en argument un entier k et retourne une valeur approchée de $E\left(X^k\right)$.
3. a) Montrer que : $\forall k \geqslant 2\ E(X^k)$ existe, et $E\left(X^k\right) = (k-1)\, E\left(X^{k-2}\right)$.
   b) Déterminer les valeurs de $E\left(X^{2k+1}\right)$ et $E\left(X^{2k}\right)$ pour $k \geqslant 1$.
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \ln\left(E\left(X^{2n}\right)\right)$.
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \ln(2n+1)$.
   b) Programmer sous Python une fonction qui renvoie les valeurs de u_n et $\dfrac{u_n}{n \ln n}$.
   c) Estimer la limite de u_n quand $n \to +\infty$.
   d) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(2k+1)$

      puis que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n \ln 2$.
   e) Montrer que u_n est équivalent à $n \ln n$.

110 Loi de la n-ème décimale de 10^X, X uniforme

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0,1[$.
On pose $Y = 10^X$ et $Z = \lfloor Y \rfloor$ où $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière.

1. **a)** Donner l'univers image de Y.
   b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y est une variable à densité.
   c) Montrer que l'univers image de Z est $[\![1,9]\!]$ et que $\forall k \in [\![1;9]\!]$, $P(Z=k) = \dfrac{1}{\ln 10} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.
   d) Justifier que Z admet une espérance et la calculer.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note A_n la n-ième décimale de Y (A_0 est donc la partie entière de Y).

2. Écrire une fonction `Python` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la liste $[A_0, \cdots, A_n]$.
   Par exemple, si $n=4$ et $Y = 2,68956\ldots$, la liste renvoyée est `[2,6,8,9,5]` .
3. On admet que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \in [\![1;9]\!]$:

$$P(A_n = k) = \frac{1}{\ln 10} \sum_{i=10^{n-1}}^{10^n} \ln\left(1 + \frac{1}{10i+k}\right)$$

   a) Montrer que : $\forall x > -1 \quad \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.
   b) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, et S_n la n-ème somme partielle de la série harmonique, c'est-à-dire :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

   Montrer que : $\dfrac{1}{10\ln(10)}(S_{10^{n+1}} - S_{10^n}) \leq P(A_n = k) \leq \dfrac{1}{10\ln(10)}(S_{10^n} - S_{10^{n-1}})$.
   c) On admet que pour un réel $\gamma > 0$:

$$S_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{n} \times o(1) \quad n \to \infty.$$

   En déduire que pour $k \in [\![1;9]\!]$ $P(A_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{10}$.
   d) En utilisant la fonction Python de la question **2.**, évaluer les valeurs de $P(A_3 = k)$.

111 Convergence d'une intégrale aléatoire

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

1. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ un réel quelconque et
$$J = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t.$$
Étudier la convergence de J en fonction de α (ne pas oublier de traiter le cas $\alpha < 0$).

2. **a)** Soit m, r deux réels positifs. Déduire de ce qui précède la nature de
$$i(r, m) = \int_0^1 \frac{t^m}{\ln(1 + t^r)} \mathrm{d}t.$$

3. On lance deux dés équilibrés, l'un mauve, l'autre rouge. On note M et R les variables aléatoires égales aux scores respectifs de ces dés et on considère l'intégrale :
$$I = \int_0^1 \frac{t^M}{\ln(1 + t^R)} \mathrm{d}t.$$
Calculer la probabilité que I soit convergente.

4. **a)** Proposer un script en **`Python`** permettant de calculer une valeur approchée de l'intégrale impropre : $i(r, m)$ pour deux entiers naturels r, m données *(On pourra approcher la valeur de $i(r, m)$ par une intégrale partielle de son choix).*

b) En déduire un script permettant d'estimer la probabililité que I soit convergente.

c) Confronter le résultat expérimental obtenu au résultat théorique de la question **3.**

112 Racine carrée d'une loi exponentielle

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.
2. Calculer l'espérance et la variance de Y.
3. Soit U une variable aléatoire de loi $\mathscr{U}(0, 1)$. Montrer que la variable $Y = -\dfrac{1}{\lambda} \ln U$ est à densité et donner sa loi.
4. Écrire une fonction **Python** permettant de simuler la variable aléatoire Y.

113 Loi de Pareto

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On rappelle que si I est un intervalle, la fonction $\mathbf{1}_I$ est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\mathbf{1}_I(x) = 1$ si $x \in I$, et $\mathbf{1}_I(x) = 0$ sinon.

Soit $\theta > 0$ et f_θ la fonction définie par $f(x) = \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x) \times \dfrac{1}{\theta} x^{-\frac{1+\theta}{\theta}}$

1. Vérifier que f_θ est une densité de probabilité.
2. Calculer sa fonction de répartition.
3. Soit X une variable aléatoire admettant f_θ pour densité. Proposer un script en **Python** permettant pour deux flottants `a` $\leq$ `b` donnés d'obtenir une valeur approchée de la probabilité $P(X \in [a, b])$
4. Soit $Y = \ln X$. Déterminer sa fonction de répartition et vérifier que Y est à densité. On calculera cette dernière.
5. Soit X une variable aléatoire admettant f_θ pour densité.
   a) Pour quelles valeurs de θ la variable X admet elle une espérance ? une variance ?
   b) Les calculer le cas échéant.

114 Couples ε-différentiel de variables à densité

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $\varepsilon > 0$. On dit que $(X;Y)$, un couple de variables aléatoires, est un couple ε-différentiel si, pour tout intervalle I de $\mathbf{R}R$:

$$e^{-\varepsilon}P(X\in I)\leq P(Y\in I)\leq e^{\varepsilon}P(X\in I)$$

Intuitivement, les lois de X et Y seront d'autant plus proches que le plus petit ε tel que $(X;Y)$ soit un couple ε-différentiel est proche de 0.

1. Soient X et Y deux variables à densité, de densités respectives f et g, et de fonctions de répartition F et G.
   - **a)** On suppose que pour tout $t\in\mathbf{R}R$: $e^{-\varepsilon}f(t)\leq g(t)\leq e^{\varepsilon}f(t)$. Montrer que $(X;Y)$ est ε-différentiel.
   - **b)** On suppose que $(X;Y)$ est ε-différentiel. Soient $h>0$ et $t\in\mathbf{R}R$ où f et g sont continues. Montrer que :
   $$e^{-\varepsilon}(F(t+h)-F(t))\leq G(t+h)-G(t)\leq e^{\varepsilon}(F(t+h)-F(t))$$
   En conclure que : $e^{-\varepsilon}f(t)\leq g(t)\leq e^{\varepsilon}f(t)$.
   - **c)** Formuler une condition nécessaire et suffisante sur un couple de variables aléatoires pour que celui-ci soit ε-différentiel.
2. *Un exemple : les lois de Laplace $\mathscr{L}(a;b)$.*
   On définit, pour $a\in\mathbf{R}R$ et $b>0$, la fonction $f_{a;b}$ sur $\mathbf{R}R$ par, pour tout t réel :
   $$f_{a;b}(t)=\frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|t-a|}{b}\right).$$
   - **a)** Montrer que $f_{a;b}$ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.
   - **b)** Etablir que si X suit $\mathscr{L}(a;b)$, c'est-à-dire que $f_{a;b}$ est une densité de X, alors $E(X)=a$.
   - **c)** Montrer que si X suit la loi $\mathscr{L}(a;b)$ et Y la loi $\mathscr{L}(a';b)$, alors $(X;Y)$ est $\dfrac{|a-a'|}{b}$ -différentiel.
3. *Simulation informatique d'une loi de Laplace*
   - **a)** Montrer que si X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$, alors $Y=-\ln X$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   - **b)** On suppose que V suit la loi exponentielle de paramètre 1, U la loi uniforme discrète sur $\{-1;1\}$ et qu'elles sont indépendantes. Montrer que $a+bUV$ suit la loi $\mathscr{L}(a;b)$.
   - **c)** En déduire une fonction Python `Laplace(a,b)` qui renvoie une valeur aléatoire distribuée suivant la loi $\mathscr{L}(a;b)$.

115 Espérance de XY pour des variables discrètes

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit c un réel, et pour tout couple $(m, n) \in \mathbf{N}^2$:

$$p_{m,n} = \frac{c}{2^m 3^n}.$$

1. Déterminer la valeur de c pour que la famille $p_{m,n}$ définisse la loi d'un couple (X, Y). *Dans la suite on conservera la valeur de c.*
2. Déterminer les lois marginales du couple.
3. **a)** Vérifier que $Z = XY$ admet une espérance et en donner la valeur.
   b) Le couple (X, Y) admet-il une covariance ? la calculer le cas échéant.
   c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Soit $S = X + Y$. Proposer une fonction en python prenant un réel t quelconque et renvoyant la valeur de $P(S \leq t)$, puis tracer la fonction de répartition de S.

116 Variables finies et covariance

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On place au hasard n boules discernables dans N tiroirs numérotés de 1 à N. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rangées dans le premier tiroir et, X le nombre de tiroirs vides. Soit également, pour $i \in \{1 \dots N\}$, X_i la VAR de Bernoulli égale à 1 si le tiroir i est vide.

1. Simuler l'expérience en Python.
2. a) Déterminer la loi, l'espérance, et la variance de Y.
   b) Calculer $\operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right)$ pour $1 \leq i, j \leq N$.
   c) Calculer $E(X)$.

117 Somme aléatoire de variables de Bernoulli

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $p \in]0,1[$ et (X_n) une suite de VAR aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathscr{B}(p)$. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, indépendante de la suite (X_n).

On définit une variable aléatoire Y par :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si} \quad N \neq 0 \end{cases}$$

Attention, on fera bien attention au fait que dans la somme, la borne supérieure n'est pas un entier : Y est une somme aléatoire de termes.

1. Pour le moment, on admet qu'on dispose d'une fonction `Poisson(l)` dont l'appelle renvoie une réalisation d'une variable de loi de poisson de paramètre `l`.
   Simuler la variable aléatoire Y en python.
2. Rappeler pour $r \in \mathbf{N}^\star$ la loi de $S_r = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} X_k$.
3. Déterminer les lois conditionnelles de Y.
4. En déduire la loi marginale de Y (on traitera à part le calcul de $P(Y = 0)$).
5. Déterminer le cas échéant $E(Y)$.
6. Programmer la fonction `Poisson`.

118 Couple de variables discrètes à paramètres

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

1. On pose, pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. On admet que, pour tout entier p, la dérivée p-ème de f s'obtient en dérivant terme à terme la série. En déduire que pour $x \in]-1,1[$:
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+p}{p} x^k = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}.$$
2. Soit $\lambda > 0$ un réel et (X,Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^2$ dont la loi de probabilité est donnée par la formule :
$$\forall (m,n) \in \mathbf{N}^2 \quad P(X=m, Y=n) = c\binom{m+n}{n}\left(\frac{\lambda}{2\lambda+1}\right)^{m+n+1}.$$
   a) Déterminer la valeur de c.
   b) Vérifier que les lois de $X+1$ et $Y+1$ sont des lois géométriques sur $\mathbf{N}^\star$.
   c) Démontrer que :
$$\sum_{m=0}^{+\infty} m\binom{m+n}{n}\left(\frac{\lambda}{2\lambda+1}\right)^m = (n+1)\frac{\lambda}{2\lambda+1}\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}\right)^{n+2}.$$
   d) En déduire que $E(XY) = 2\lambda^2$. Déterminer alors la covariance de X et Y.
3. Rappeler l'expression de la loi de $Z = X+Y$.
4. Écrire un programme en **Python** qui prend en entrée un entier `n`, un flottant `landa`, deux listes `X` Et `Y` de longueur `n+1` telles que `X[k]` contienne la valeur de $P(X=k)$ (idem pour `Y` avec Y) et renvoie en sortie une valeur numérique de $P(Z=n)$

119 Loi de $(X - Y)_+$

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que $X + 1$ suit une loi géométrique sur $\mathbf{N}^\star$ de paramètre $a \in]0, 1[$. Soit Z la variable donnée par $Z = \max(X - Y, 0)$.

1. Dans cette question seulement, on suppose que Y suit une loi géométrique de paramètre p. Écrire une fonction en **Python** `simulZ(a,p)` qui simule la variable Z.
2. **a)** Calculer la loi de X.

   b) Calculer la fonction de répartition de X aux points entiers naturels.
3. **a)** Déterminer l'univers image de Z.

   b) Déterminer la loi de Z en fonction de celle de Y (*on pourra traiter d'abord le calcul de* $P(Z = 0)$).

   c) Montrer que la loi de Z ne dépend de Y qu'à travers $\alpha = E\left((1 - a)^Y\right)$.
4. Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs, mettons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Écrire une fonction en **Python** qui prend en entrée une liste `X` représentant les valeurs prises par X, une liste `P` telle que `P[k]` $= P(X = x_{k+1})$, une fonction `f`, et renvoyant en sortie la valeur de $E(f(X))$.

Géométrie

120 Plan équidistant à une base orthogonale de $\mathbf{R}^3$

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

1. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels non nuls. Ecrire une fonction `Python` qui renvoie `True` si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ $a_i^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k^2} \geq 2$ et qui renvoie `False` sinon. La fonction aura pour seul paramètre une liste contenant les réels $a_1, \dots, a_n$.

2. On considère les vecteurs $\vec{u} = (1;0;0)$, $\vec{v} = \sqrt{2}(0;1;0)$, $\vec{w} = \sqrt{2}(0;0;1)$ et P le plan de $\mathbf{R}^3$ admettant pour équation dans la base canonique :

$$y - z = 0.$$

Déterminer les projetés orthogonaux des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sur le plan P et vérifier qu'ils ont même norme.

3. Soit $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et a_1, a_2, a_3 trois réels tous non nuls. On suppose qu'il existe un plan P tel que les projetés orthogonaux des vecteurs $a_1\vec{e_1}$, $a_2\vec{e_2}$ et $a_3\vec{e_3}$ sur ce plan aient tous la même norme que l'on notera d. On considère $(\vec{\varepsilon_1}; \vec{\varepsilon_2})$ une base orthonormée de P et $\vec{\varepsilon_3}$ un vecteur normal à P de norme 1. On note p la projection orthogonale sur le plan P.

a) Donner une expression de $p(\vec{e_i})$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ à l'aide des vecteurs $\vec{\varepsilon_1}$ et $\vec{\varepsilon_2}$.

b) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a :

$$\langle \vec{e_i}, \vec{\varepsilon_1} \rangle^2 + \langle \vec{e_i}, \vec{\varepsilon_2} \rangle^2 = \left(\frac{d}{a_i} \right)^2.$$

c) Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2} = \frac{2}{d^2}.$$

d) Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer que $|a_i| \geq d$ puis que :

$$a_i^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{a_k^2} \geq 2.$$

121 Projection orthogonale dans $\mathbf{R}^3$

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On se place dans $\mathbf{R}^3$.
Soit (u, v) une base orthonormale d'un plan $\mathscr{P}$.
Soit n un vecteur normal à $\mathscr{P}$ et de norme 1.
On note $p(w)$ le projeté orthogonal de w sur $\mathscr{P}$.

1. a) Montrer que : $\forall w \in \mathbf{R}^3,\ w = (u \cdot w)u + (v \cdot w)v + (n \cdot w)n$.

b) Montrer que $p(w) = w - (n \cdot w)n$.

c) Écrire une fonction `projection(W,N)`, où `W` et `N` sont les listes des coordonnées des vecteurs w et n, et qui renvoie le projeté orthogonal de w sur $\mathscr{P}$.
Tester la fonction avec `W=(1,1,1)` et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

2. a) Soit (w_1, w_2, w_3) une famille orthogonale de $\mathbf{R}^3$.
Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note d_i la norme du vecteur w_i.
Montrer que $n = \dfrac{(n \cdot w_1)}{d_1^2} w_1 + \dfrac{(n \cdot w_2)}{d_2^2} w_2 + \dfrac{(n \cdot w_3)}{d_3^2} w_3$

b) Montrer qu'il existe un plan $\mathscr{P}$ tel que les projetés de w_1, w_2, w_3 aient tous la même norme notée d qui vérifie :
$\forall i \in \{1, 2, 3\},\ d_i > d$ et $\dfrac{1}{d_1^2} + \dfrac{1}{d_2^2} + \dfrac{1}{d_3^2} = \dfrac{2}{d^2}$.
On pourra demontrer que $\forall i \in \{1, 2, 3\},\ (n \cdot w_i)^2 = d_i^2 - d^2$.

c) Ce plan est-il unique ?

122 Formule de Koenig

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit X une variable aléatoire finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$, d'espace image noté $\{x_1, \dots x_n\}$. On note $(p_k)_{1\leq k\leq n}$ la fonction de masse induite par la loi de X (on a donc $P(X = x_k) = p_k$).

1. **a)** Proposer une fonction **Python** qui prend en entrée une liste $\mathtt{L} = [\mathtt{L}[0], \dots \mathtt{L}[n-1]]$ et qui renvoie en sortie la liste $S = (s_0, \dots, s_{n-1})$ où

$$s_0 = \mathtt{L}[0], \quad s_1 = \mathtt{L}[0] + \mathtt{L}[1], \quad \dots \quad , s_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathtt{L}[\mathtt{k}]$$

b) En déduire une fonction prenant en entrée la liste des x_k et la liste des p_k, et simulant la variable aléatoire X. On pourra utiliser la fonction `random()` du module `random` qui renvoie en sortie un flottant tiré suivant la loi $\mathscr{U}(0,1)$.

2. On note pour tout entier $i \in \{1 \dots n\}$: $\omega_i = \sqrt{p_i}$.

a) Dans $\mathbf{R}^n$, calculer la projection orthogonale du vecteur $\mathbf{y} = (\omega_1 x_1, \dots, \omega_n x_n)$ sur le sous-espace vectoriel D engendré par $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$

b) En déduire la formule de Koenig pour la variable X :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

3. En déduire la formule de Koenig pour une statistique univariée $x = (x_1, \dots x_n)$:

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2,$$

où s_x est la variance de l'échantillon de mesures x, et $\overline{x}$ la moyenne des mesures ($\overline{x^2}$ étant la moyenne des carrés des mesures).

123 Calcul de projection orthogonale dans $\mathbf{R}^4$

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère le sous-espace F défini par le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} x+y+z+t & = & 0 \\ x+2y+z-t & = & 0 \end{cases}$$

1. Un vecteur de $\mathbf{R}^n$ est représnté en **Python** par la liste de ses coordonnées.
   - **a)** Écrire une fonction `dot(X,Y)` prenant en entrée deux listes `X`, et `Y` représentant des vecteurs x, y de $\mathbf{R}^n$ renvoyant le produit scalaire $x \cdot y$.
   - **b)** Écrire une fonction `sont_orth(X,Y)` prenant en entrée deux listes `X`, et `Y` représentant des vecteurs x, y de $\mathbf{R}^n$ renvoyant `True` si les vecteurs x, y sont orthogonaux et `False` sinon.
2. Justifier que F est de dimension 2 et en donner une base, notée (u, v) dans la suite.
3. Calculer la projection orthogonale $\pi(v)$ de v sur $D = \operatorname{Vect}(u)$.
4. **a)** Représenter $u, v, \pi(v), F$ sur un dessin et proposer un vecteur de F orthogonal à u.
   - **b)** En déduire une base orthonormée de F.
   - **c)** Vérifier que la base obtenue est bien orthonormée avec vos fonctions **Python**.
5. (*Cette question est indépendante de ce qui précède*)
   - **a)** Soit w un vecteur non nul de $\mathbf{R}^n$ fixé. On note W sa matrice sur la base canonique. Donner , pour tout vecteur $\mathbf{x} \in$ l'expression du projeté orthogonal $\pi_w(x)$ sur $\operatorname{Vect}(w)$.
   - **b)** Donner l'expression matricielle de $\pi_w(x)$ en fonction de W et X la matrice de x sur la base canonique.
   - **c)** Soit Π_w la matrice de l'endomorphisme π_w sur la base canonique. Déduire de ce qui précède l'expression de Π_w en termes de la matrice W de w .
6. Déduire de ce qui précède la matrice A du projecteur orthogonal sur F.

124 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbf{R}^n$.

2. Un vecteur de $\mathbf{R}^n$ est représnté en **Python** par la liste de ses coordonnées.

a) Écrire une fonction `dot(X,Y)` prenant en entrée deux listes `X`, et `Y` représentant des vecteurs x, y de $\mathbf{R}^n$ renvoyant le produit scalaire $x \cdot y$.

b) Écrire une fonction `sont_orth(X,Y)` prenant en entrée deux listes `X`, et `Y` représentant des vecteurs x, y de $\mathbf{R}^n$ renvoyant `True` si les vecteurs x, y sont orthogonaux et `False` sinon.

3. Le but de ce qui suit est de prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

a) Prouver l'inégalité dans le cas où u, v sont colinéaires.

b) On suppose maintenant que u, v sont libres. On pose

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right) \quad \text{et} \quad F = \operatorname{Vect}(a, b).$$

i) Vérifier que a, b sont bien définis et que (a, b) est une base orthogonale de F.

ii) Vérifier que u, v sont dans F.

iii) Calculer ensuite $u \cdot v$, $\|u\|^2$ et $\|v\|^2$ et en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

125 Projecteur sur un sev orthogonal à un sev donné

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \geq 1$ un entier. Dans $\mathbf{R}^n$ on considère $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée donnée.

1. (*question de cours*) Donner la décomposition d'un vecteur x quelconque de $\mathbf{R}^n$ sur la base $\mathscr{B}$.
2. Un vecteur de $\mathbf{R}^n$ est représnté en **Python** par la liste de ses coordonnées.
   - **a)** Écrire une fonction `dot(X,Y)` prenant en entrée deux listes `X`, et `Y` représentant des vecteurs x, y de $\mathbf{R}^n$ renvoyant le produit scalaire $x \cdot y$.
   - **b)** Écrire une fonction `sont_orth(X,Y)` prenant en entrée deux listes `X`, et `Y` représentant des vecteurs x, y de $\mathbf{R}^n$ renvoyant `True` si les vecteurs x, y sont orthogonaux et `False` sinon.
3. On reprend la base $\mathscr{B}$ introduite au début de l'exercice. On note pour tout entier k dans $\{1 \dots n\}$: $E_k = \mathrm{Vect}\left(u_1, \dots, u_k\right)$, et on note pour tout vecteur x de $\mathbf{R}^n$: $p_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \left(u_j \cdot x\right) u_j$.
   - **a)** Justifier que p_k définit un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.
   - **b)** Déterminer son image et son noyau (on commencera par le noyau, on en donnera une base et la dimension).
   - **c)** Vérifier que p_k est le projecteur orthogonal sur E_k.
     (*On rappelle que p est le projecteur orthogonal sur un sev F ssi $\mathrm{Im}\, p \subset F$ et pour tout vecteur x, $x - p(x)$ est orthogonal à F, c-à-d à tout vecteur de F*).
   - **d)** Comment interpréter l'endomorphisme $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n} - p_k$?
4. (*Application*). Dans $\mathbf{R}^3$, on pose $D = \mathrm{Vect}\,(e)$, $e = (1, 1, 1)$.
   - **a)** Donner l'équation du plan F orthogonal à D.
   - **b)** Donner la matrice du projecteur orthogonal sur F.

126 Diagonalisation d’un projecteur orthogonal

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d’informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l’oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l’énoncé, le jury l’a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d’en faire en direct par le jury.*

Dans $\mathbf{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}(a, b)$ où $a = (1, 2, 2)$, $b = (2, 1, -2)$.

1. **a)** Écrire un script `Python` de fonction `ps(u,v)` prenant en entrée deux listes de 3 flottants représentant deux vecteurs u, v de $\mathbf{R}^3$ et renvoyant en sortie le produit scalaire de u et v.

   b) En déduire un script de fonction `sont_ orth(u,v)` qui prend en entrée deux listes de 3 flottants représentant deux vecteurs u, v de $\mathbf{R}^3$ et renvoyant en sortie `True` si u, v sont orthogonaux et `False` sinon.
2. Vérifier que F est une famille orthogonale et en déduire une base orthonormée $\mathscr{B}_F = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de F.
3. Donner la matrice sur la base canonique du projecteur orthogonal Π_F sur F. On la notera M.
4. Déterminer un vecteur e_3 tel que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
5. Donner la matrice D de Π_f sur la base $\mathscr{B}$.
6. Calculer la distance du vecteur $(1, 1, 1)$ au plan F.

127 Espace vectoriel de matrices

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On rappelle que $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et que I_3 désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

Soit E le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ défini par :

$$E = \left\{ M(a,b,c) \quad (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\} \quad \text{où} \quad M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ dont on donnera une base $\mathscr{B}$ et la dimension.
2. Les matrices seront implémentées sous `Python` à l'aide du module `numpy`.
   a) Écrire une fonction `est_dans_E(M)` qui prend en entrée une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et qui renvoie en sortie `True` si M est dans E et `False` sinon.
   b) Écrire une fonction `ME(a,b,c)` qui prend en entrée trois flottants a,**b**,c et qui renvoie en sortie la matrice $M(a,b,c)$ du sous-espace vectoriel E.
   c) Montrer que :
   $$(P) \qquad \forall (M,N) \in E \times E \quad MN \in E$$
   d) Vérifier que votre programmation de `ME` est correcte en vérifiant informatiquement la propriété (P) ci-dessus.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que $A \in E$ et préciser les coordonnées de A sur la base $\mathscr{B}$.
   b) Justifier que $A^2 \in E$ et préciser les coordonnées de A^2 sur la base $\mathscr{B}$.
   c) Vérifier que I_3 est dans E, puis montrer que la famille $\mathscr{B}' = \left(I_3, A, A^2\right)$ est une base de E.
   d) Calculer A^3 et donner les coordonnées de A^3 sur la base $\mathscr{B}$.
   e) Exprimer A^3 en fonction de I_3 et A et en déduire les coordonnées de A^3 sur la base $\mathscr{B}'$.

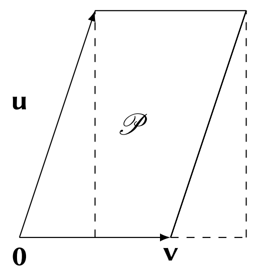
128 Inégalité de Cauchy-Scwarz (inachevé)

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Rappeler cette inégalité pour deux vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ de $\mathbf{R}^n$.
2. La prouver si l'un des vecteurs $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{v}$ est nul.
3. On suppose maintenant que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont non nuls.



   a) Exprimer l'aire A du parallèlogramme $\mathscr{P}$ défini par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ en termes de normes de vecteurs bien choisis (on pourra commencer par relier A à l'aire du rectangle en pointillés et introduire ensuite un projecteur orthogonal bien choisi).
   b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz en considérant A^2.
   c) Dans quel(s) cas l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité ?
4. Écrire en python le script d'une fonction `det(A)` prenant en entrée une matrice 2×2 vue comme un tableau `numpy` 2-dimensionnel et renvoyant en sortie le déterminant de la matrice A.
5. Écrire une fonction qui prend en entrée deux matrices 2×2 A et B et renvoie en sortie le booléen `True` is $\det(AB) = \det A \times \det B$ et `False` sinon.

129 Estimateur des moindres carrés

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Cet estimateur intervient très souvent en sciences expérimentales et est à la base de ce qu'on appelle ***les modèles de régression linéaire simple****.*

Rappel : soit $n \geq 2$ et $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$ un nuage de points issu d'une statistique bivariée (x, y).

— Dans le cas particulier où x_i, y_i sont des grandeurs physiques mesurées et que l'on recherche une loi affine reliant et y à x, on considère la variable statisitque x comme le *prédicteur* et y comme la *réponse*.
— On suppose que le prédicteur est parfaitement maitrisé, ce qui fait qu'il n'y a aucune incertitude sur les mesures x_i effectuées.
— En outre, du fait de la variabilité des mesures de y (due notamment aux incertitudes de mesures, mais aussi à l'action de paramètres non maitrisés ou inconnus), si l'on répétait une série de mesures de la réponse y au prédicteur x, on observerait d'autres valeurs y_i.

Cette variabilité des mesures peut être à son tour considérée comme l'observation d'une variable aléatoire Y_i pour la i-ème mesure, et on modélise donc la liaison entre les mesures et les reponses par :

$$\forall i \in \{1 \dots n\} \quad Y_i = ax_i + b + \varepsilon_i$$

où ε_i est une *variable aléatoire* représentant les fluctuations de l'erreur de mesure de la réponse observée pour la mesure x_i. On suppose que les variables ε_i sont un n-échantillon d'une loi centrée et de variance σ^2 (typiquement : une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, cette dernière hypothèse s'appelle homoscédasticité).

Ce modèle de variabilité des mesures s'appelle *modèle de régression linéaire simple*.

1. On rappele l'équation de la droite des moindres carrés pour le nuage de points (x_i, y_i) :

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \text{ où } a = \frac{s_{x,y}}{s_x^2}.$$

2. On suppose que les variables ε_i sont un n-échantillon d'une loi centrée et de variance σ^2. On propose les estimateurs $\hat{a}$ pour le paramètre a et un estimateur $\hat{b}$ pour le paramètre b définis de la manière suivante :

$$\hat{a} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i(x_i - \overline{x})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \qquad \text{et } \hat{b} = \overline{Y} - \overline{ax}$$

Expliquer brièvement le choix de ces estimateur.

3. Calculer $E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i(x_i - \overline{x})\right)$.
4. En déduire que $\hat{a}$ est un estimateur sans biais de a.

5. Calculer $E(\overline{Y})$. En déduire que $\hat{b}$ est un estimateur sans biais de b.

6. Montrer que $\hat{a} - a = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x_i - \overline{x})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$.

7. En déduire que $V(\hat{a}) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$

130 Méthode des moindres carrés et point critique

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \geq 2$ et $\{(x_i, y_i)\}_{1\leq i\leq n}$ un nuage de points issus d'une statistique bivariée telle que $s_x^2 \neq 0$.

Pour tous réels a, b on définit l'écart quadratique moyen de la droite d'équation $y = ax + b$ au nuage par l'expression :

$$\mathrm{EQM}(a, b) := \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

Le but est de retrouver l'expression de la droite de régression associée au nuage de points en cherchant le minimum de la fonction de deux variables $(a, b) \mapsto \mathrm{EQM}(a, b)$.

On définit les vecteurs de $\mathbf{R}^n$:

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Enfin, le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de $\mathbf{R}^n$ est noté $(\mathbf{u}|\mathbf{v})$.

1. a) Soit u, v deux réels fixés. Soit T la fonction de deux variables définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$T(\alpha, \beta) = (\alpha u + \beta - v)^2.$$

Quelle est la nature des fonctions partielles de T ?

b) Calculer les dérivées partielles de T en tout point (α, β).

2. a) Justifier qu'on peut chercher à minimiser $f(a, b) = \dfrac{1}{2n}\mathrm{EQM}(a, b)$ au lieu de $\mathrm{EQM}(a, b)$.

b) Calculer les dérivées partielles de f en (a, b) à l'aide des résultats de la question **1. b)**

c) Vérfier que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{1}{n}(\mathbf{x}|\mathbf{w}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{1}{n}(\mathbf{1}|\mathbf{w})$$

où $\mathbf{w}$ est un vecteur de $\mathbf{R}^n$ à préciser dépendant de a et b.

d) Donner une condition nécessaire pour qu'en (a, b) la fonction f admette un minimum. La condition est-elle suffisante ?

e) Quelle est la nature du système d'équations (S) dont les points critiques de f sont solutions ?

f) Vérifier en examinant (S) que la droite des moindres carrées associée au nuage de points passe par le point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage de points.

g) Résoudre enfin le système (S) et retrouver l'équation de la droite de régression (on admettra qu'on a bien pour les valeurs de (a, b) obtenues un minimum absolu de f).

131 Intervalle de confiance pour $\pi/4$ par la méthode de Monte-Carlo

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On rappelle que si U, V sont deux variables aléatoires indépendantes admettant respectivement les densités f et g, alors la variable aléatoire $U+V$ admet pour densité la fonction $f \star g$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

On considère deux variables aléatoires U et V indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Justifier son existence, puis déterminer une densité f de la variable aléatoire U^2. Déterminer de même une densité g de V^2.
2. On considère la variable $Z = U^2 + V^2$. Justifier que Z admet une densité, notée h dans la suite.
3. Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire Z et d'estimer $P(Z \geq 1)$.
4. **a)** Montrer que pour $x \in [0,1]$, on a $h(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{x-t}\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

   b) Montrer que pour $x \in [0,1]$, on a $h(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1-y}\sqrt{y}}\mathrm{d}y$.

   c) Montrer que sur $]0,1]$, on a $h(x) = \dfrac{\pi}{4}$ (*on pourra utiliser le changement de variables $y = \sin^2 u$*).

   d) Interpréter géométriquement le résultat obtenu en termes d'aire.
5. On considère une suite de variables de Bernoulli $(Y_n)_{n\geq 1}$ mutuellement indépendantes et de même paramètre $\dfrac{\pi}{4}$, et on note pour tout entier natuel $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

   a) Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer en fonction de n et ε une majoration de $P\left(\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$.

   b) En déduire à partir quelle valeur de n il suffit de fixer pour un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de $\dfrac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2}.

   c) Que donnerait l'application du théorème de Moivre-Laplace ?

132 Étude des densités de Cauchy

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $a > 0$. On considère la fonction f_a définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R} \quad f_a(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$.

1. **Étude d'une variable aléatoire.**
   - **a)** Vérifier que f_a est une densité de probabilité (appelée loi de Cauchy de paramètre a).
   - **b)** Donner une expression de la fonction de répartition F_a de cette loi.
   - **c)** La loi de Cauchy admet-elle une espérance ?
   - **d)** Soit Y une variable de loi de Cauchy de paramètre 1. Quelle est la loi de la variable $X = aY$?
2. **Considérations informatiques.**
   - **a)** Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Z = \tan\left(\pi U - \dfrac{\pi}{2}\right)$. Montrer que Z est définie quasi-certainement et donner la loi de Z.
   - **b)** Écrire une fonction `python` nommée `cauchy(a)` et renvoyant en sortie une réalisation d'une variable aléatoire de loi la loi de Cauchy de paramètre a.
   - **c)** On considère le code suivant :

```
"""
L'intervalle [xmin,xmax] est divise en n parties
on lance N simulations de loi de Cauchy puis
On determine la frequence d'apparition dans chacune des n parties
"""
Y=[0]*n
h=(xmax-xmin)/n
for i in range(N):
    k=floor((cauchy(a)-xmin)/h)
    if k>=0 and k<n :
        Y[k].......# A COMPLETER
X=[]
for i in range(n):
    X.append(xmin+i*h)
plt.bar(X,Y)
return X,Y
```

Compléter cette fonction afin d'obtenir un histogramme représentant pour chaque intervalle $I_k = \left[x_{\min} + \dfrac{k}{n}; x_{\min} + \dfrac{k+1}{n}\right]$ la proportion des résultats parmi les `N` simulations de la loi de Cauchy de paramètre a contenus dans I_k.

d) On fait la conjecture que si X et Y sont deux variables indépendantes de lois de Cauchy de paramètres respectifs a et b, alors $Z = X + Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre $a + b$. Proposer un script en `Python` permettant de visualiser sous forme de diagrammes la loi de Z et la loi de Cauchy de paramètre $a + b$. Conclusion ?

3. Autour de la loi des grands nombres.

a) Énoncer la loi faible des grands nombres.

b) Si $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^\star}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi de Cauchy de paramètre 1, on note $Z_n = \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)/n$. Que peut-on formuler quant à loi de Z_n ? Un résultat semblable à une loi faible des grands nombres pour Z_n peut-il être énoncé dans ce cadre ?

133 Intervalle de confiance et loi de Poisson

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On considère une population de n insectes. Le nombre aléatoire N d'œufs pondus par un insecte donné suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$. Chaque œuf peut éclore avec une probabilité $p \in]0;1[$. On note X la variable aléatoire égale au nombe d'œufs éclos pour un insecte donné et Y le nombre d'œufs non éclos. On suppose les comportements des insectes mutuellement indépendants, ainsi que les éclosions des œufs.

1. **Questions d'informatique.** On utilisera les fonctions ci-dessous en prenant comme valeur des paramètres : $n = 10$, $p = 0.25$ et $\mu = 40$.
   - **a)** En utilisant un théorème limite sur l'approximation poissonnienne, ou sur l'approximation binomiale (justifier la validité de votre approximation dans toues les cas) écrire une fonction `f1(mu)` prenant en entrée un flottant μ et renvoyant en sortie une réalisation (approchée !) de la variable N.
   - **b)** Écrire une fonction `f2(mu,p)` qui prend en entrée les paramètres μ et p du modèle et qui renvoie en sortie une réalisation (approchée) du couple (X, Y).
   - **c)** Écrire une fonction `f3(n,mu,p)` qui prend en entrée les paramètres n, μ et p du modèle, et qui renvoie en sortie le nombre total d'œufs éclos.
2. **Analyse mathématique.**
   - **a)** Calculer la loi de la variable X. Même question pour la loi de Y.
   - **b)** Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\operatorname{cov}(X, Y)$.
   - **c)** On note N_{10} le nombre d'œufs pondus par 10 insectes et Z_{10} le nombre d'œufs éclos au total pour ces 10 insectes. Donner les lois de N_{10} et de Z_{10}.
   - **d)** Calculer $m = E(N_{10})$. Determiner un réel ε tel que $P(|Z_{10} - m| < \varepsilon) \geq 0,95$.
   - **e)** Utiliser la fonction `f3` pour vérifier votre estimation.
   - **f)** Peut-on informatiquement améliorer la valeur de ε ?

134 Estimation d'une proportion par sondage secret

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

On veut estimer la proportion (inconnue) p d'individus atteints d'une maladie dans une population donnée, tout en préservant l'anonymat des personnes sondées. Pour cela, on interroge $N \in \mathbf{N}^\star$ personnes choisies au hasard et mutuellement indépendante. Chaque personne interrogée entre dans un isoloir et y lance une pièce :

— Si elle obtient `pile`, elle répond honnêtement à la question «êtes-vous atteint de la maladie» ?

— Si elle obtient `face`, elle relance la pièce et répond «oui» si la pièce donne `pile` et «non» si elle donne face.

1. a) Écrire en `python` une fonction `reponse(p)` prenant en entrée un flottant `p` représentant la proportion de personnes atteintes dans la population et renvoyant en sortie la réponse d'une personne interrogée.

   b) En déduire une fonction `freq_Oui(N,p)` prenant en entrée un entier `N` représentant le nombre de personnes interrogées, n flottant `p` représentant la proportion de personnes atteintes dans la population, et renvoyant en sortie la fréquence de «oui» observée sur l'échantillon des N sondés.

2. Soit $\theta = \frac{p}{2} + \frac{1}{4}$ et on définit une suite finie de variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ définies par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si la } i\text{-ème personne interrogée a répondu «oui»} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   On pose enfin :

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

   a) Calculer l'espérance et la variance de F_N.

   b) Montrer que $\theta(1-\theta) \leq \frac{1}{4}$. En déduire que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(|F_N - \theta| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

   c) On considère un réel ε_N vérifiant $\frac{1}{4N\varepsilon_N^2} = 0,05$. Montrer que :

$$P\left(2F_n - 2\varepsilon_N - \frac{1}{2} \leq p \leq 2F_n + 2\varepsilon_N - \frac{1}{2}\right) \geq 0,95.$$

   Écrire une fonction `IC(F,N)` prenant en entrée un entier `N` représentant la taille de l'échantillon, un flottant `F` représentant la fréquence observée des «oui» dans l'échantillon et renvoyant en sortie un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de p.

   d) Peut-on améliorer l'intervalle de confiance pour un même niveau de risque ? Si oui, comment ?

135 Intervalles de confiance par Tchebychev et approximation normale

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

1. Écrire en `Python` le script d'une fonction `Fx(alpha,beta,h)` prenant en entrée trois flottants `alpha`, `beta`,`h`, tels que `alpha`$\leq$`beta`, et `h`>0, et renvoyant en sortie une valeur approchée calculée par la méthode des rectangles de pas `h` de l'intégrale suivante :

$$J(\mathtt{alpha}, \mathtt{beta}, \mathtt{h}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathtt{alpha}}^{\mathtt{beta}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

on pourra notamment utiliser la fonction `arange`, *et fixer le pas* `h` à `h` $= 10^{-2}$.

2. Soit $m \in \mathbf{R}, \sigma^2 > 0$, et pour tous réels $a \leq b$:

$$I(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x.$$

   a) On note Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Exprimer $I(a,b)$ sous la forme $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$, où α, β seront deux réels à préciser.

   b) En déduire en `Python` le script d'une fonction `Prob_approx(a,b)` prenant en entrée deux flottants `a`,`b` et renvoyant en sortie une valeur approchée de $I(a,b)$.

   c) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. Écrire une fonction `Python` prenant en entrée un flottant `alpha`$\in [0,1]$ et renvoyant en sortie

3. La S.I.C. (*Syldavian Insurance Corporation*) assure 500 navires pour 5 millions de couronnes syldaves chacun. Chaque navire a une probabilité de 1/1000 d'être perdu dans l'année. On n'envisage que deux possibilités : soit le navire est en état de marche, soit il est perdu. Les états des navires sont mutuellement indépendants.

   Quelles réserves d'argent la compagnie doit-elle posséder pour être certaine de pouvoir rembourser avec une probabilité d'au moins 999/1000 à la fin de l'année ? Pour cela, on déterminera un intervalle de confiance du nombre moyen de navires perdus :

   a) Par l'inégalité de Tchebychev.

   b) Par une approximation normale.

136 Test de comparaison de moyennes

Déroulement de la khôlle

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

Pour un TIPE, des étudiants veulent étudier l'influence du taux d'humidité de l'atmosphère sur le nombre de stomates présentes sur les pétioles d'un pied de fougère.

Pour cela, ils font pousser de tels végétaux dans deux atmosphères à humidité contrôlée mais différentes (les autres paramètres sont supposés identiques).

Ensuite ils prélèvent 30 feuilles dans chacune des enceintes et comptent le nombre de stomates observés.

Pour l'atmosphère 1, ils trouvent une moyenne de 20,20 stomates par pétiole et un écart-type de 3,1.

Pour l'atmosphère 2, ils trouvent une moyenne de 21,85 stomates par pétiole et un écart-type de 3,5.

1. Proposer un estimateur T_i ($i = 1$ ou 2) pour chacune des moyennes et donner une loi limite permettant d'approcher la distribution d'échantillonnage.
2. On se demande si la différence de moyenne est significative. En supposant les échantillons indépendants, quelle est (approximativement) la loi de $T_1 - T_2$?
3. Si on suppose que les moyennes théoriques sont égales, que valent l'espérance et la variance de $T_1 - T_2$?
4. Faire un test de conformité à la moyenne pour $T_1 - T_2$ et décider au risque de 5% si l'hypothèse que l'humidité a une influence est à accepter ou rejeter.

137 Série alternée semi-convergente

`Déroulement de la khôlle`

1. *Je ne remplis pas le carnet de colles. Vous voudrez bien y mettre vous-mêmes, date, note et ma signature si vous voulez.*
2. *Veuillez vous présenter à la colle avec, si vous pouvez, votre ordinateur (sinon vous programmerez sur papier). Utilisez aussi le formulaire d'informatique du SCAV (une copie de ce formulaire est en dernière page (p. 156) de ce poly).*
3. *À l'oral commencez par indiquer les questions que vous avez entièrement traitées, puis celles que vous avez abordées, même partiellement.*
4. *Ne rappelez pas l'énoncé, le jury l'a sous les yeux. Indiquez simplement le numéro de la planche.*
5. *Si vous ne traitez pas de question Python, vous serez contraint d'en faire en direct par le jury.*

1. Soit a et b deux réels strictement positifs. Établir que $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

2. On considère la série de terme général $u_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ $(k \geq 1)$, et on note $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite de ses sommes partielles.

a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

b) En déduire la nature de la série de terme général u_k.

3. **a)** Écrire un script `Python` prenant en entrée un entier n et renvoyant en sortie la valeur de S_n.

b) En déduire un script `Python` prenant en entrée un flottant `eps`> 0 et renvoyant en sortie le plus petit entier n tel que S_n est une valeur approchée de la somme ℓ de la série $\sum_{n\geq} u_n$ et la valeur de S_n correspondante.

4. **a)** Montrer que pour $k \geq 2$

$$2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

b) En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ quand $n \to +\infty$.

c) La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est-elle absolument convergente ?

PYTHON
AGRO-VETO
2023

Listes

`[]`	Créer une liste vide
`[a]*n`	Créer une liste avec n fois l'élément `a`
`L.append(a)`	Ajoute l'élément `a` à la fin de la liste `L`
`L1 + L2`	Concatène les deux listes `L1` et `L2`
`len(L)`	Renvoie le nombre d'éléments de la liste `L`
`L.pop(k)`	Renvoie le $k^{\text{ème}}$ élément de la liste `L` et l'enlève de `L`
`L.remove(a)`	Enlève une fois la valeur `a` de la liste `L`
`max(L)`	Renvoie le plus grand élément de la liste `L`
`min(L)`	Renvoie le plus petit élément de la liste `L`
`sum(L)`	Renvoie la somme de tous les éléments de la liste `L`

Numpy

`import numpy as np`

`np.array()`	Transforme une liste en matrice `numpy`
`np.linspace(a,b,n)`	Crée une matrice ligne de n valeurs uniformément réparties entre a et b (inclus)
`np.zeros([n,m])`	Crée la matrice nulle de taille $n \times m$
`np.eye(n)`	Crée la matrice identité de taille n
`np.diag(L)`	Crée la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les éléments de la liste `L`
`np.transpose(M)`	Renvoie la transposée de M
`np.dot(M,P)`	Renvoie le produit matriciel MP
`np.sum(M)`	Renvoie la somme de tous les éléments de M
`np.prod(M)`	Renvoie le produit de tous les éléments de M
`np.max(M)`	Renvoie le plus grand élément de M
`np.min(M)`	Renvoie le plus petit élément de M
`np.shape(M)`	Renvoie dans un couple le format de la matrice M
`np.size(M)`	Renvoie le nombre d'éléments de M

Numpy.linalg

`import numpy.linalg as la`

`la.inv(M)`	Renvoie l'inverse de la matrice M si elle est inversible
`la.eigvals(M)`	Renvoie la liste des valeurs propres de M
`la.eig(M)`	Renvoie un couple `L,P` où `L` est la liste des valeurs propres de M et `P` la matrice de passage associée
`la.matrix_rank(M)`	Renvoie le rang de M

Random

`import random as rd`

`rd.random()`	Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$
`rd.randint(a,b)`	Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$
`rd.gauss(0,1)`	Simule une réalisation d'une variable $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
`rd.choice(L)`	Choisit aléatoirement un élément de la liste `L`

Math

`import math as m`

`m.atan(x)`	Renvoie $\arctan(x)$
`m.floor(x)`	Renvoie $\lfloor x \rfloor$
`m.factorial(n)`	Renvoie $n!$ si $n \in \mathbb{N}$
`m.sqrt(x)`	Renvoie $\sqrt{x}$ si $x \geq 0$
`m.log(x)`	Renvoie $\ln(x)$ si $x > 0$
`m.exp(x)`	Renvoie e^x

Logique

`a == b`	Teste l'égalité « $a = b$ »
`a != b`	Teste « $a \neq b$ »
`a < b`	Teste « $a < b$ »
`a <= b`	Teste « $a \leq b$ »
`a > b`	Teste « $a > b$ »
`a => b`	Teste « $a \geq b$ »
`not A`	Renvoie la négation de A
`A and B`	Renvoie « A et B »
`A or B`	Renvoie « A ou B »
`True`	Constante booléenne « Vrai »
`False`	Constante booléenne « Faux »

Matplotlib.pyplot

`import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot(X,Y,'+-r')`	Génère la courbe des points définis par les listes `X` et `Y` (abscisses et ordonnées) avec les options : • symbole : `'.'` point, `'o'` rond, `'h'` hexagone, `'+'` plus, `'x'` croix, `'*'` étoile, ... • ligne : `'-'` trait plein, `'--'` pointillé, `'-.'` alterné, ... • couleur : `'b'` **bleu** , `'r'` **rouge** , `'g'` **vert** , `'c'` **cyan** , `'m'` **magenta** , `'k'` **noir** , ...
`plt.bar(X,Y)`	Génère l'histogramme des points définis par les listes `X` et `Y` (abscisses et ordonnées)
`plt.axis('equal')`	Rend le repère orthonormé
`plt.xlim(xmin,xmax)`	Fixe les bornes de l'axe des abscisses
`plt.ylim(ymin,ymax)`	Fixe les bornes de l'axe des ordonnées
`plt.show()`	Affiche le graphique

Cette liste est non exhaustive. Les candidats sont libres d'utiliser les commandes de leur choix.