CH14 – Applications linéaires entre espaces vectoriels. Réduction des endomorphismes

Plan du chapitre

Liste des définitions

Liste des techniques de base

Grille d'analyse des exercices

Exercice	Question	T	Référence(s)	Commentaires/remarques

1. **T_0** : technique ancestrale. Pas listée dans les techniques de base.
2. **Déf** : pas de technique livrée. Revenir à la définition.
3. **C** : utilisation d'un résultat de cours (théorème, proposition, etc.)
4. $\boxed{\star}$ Question discriminante et plus difficile : demande raisonnement et enchaînement de techniques.

- Revoir la fiche de révisions de sup sur les applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$.
- E, F sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, de dimension finie ou non.
- Les vecteurs (c-à-d. les éléments de E ou F) seront notés par des lettres grasses.

1 Définitions générales

A) Terminologie

■ Définition 1 .... [$\mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{L}(E)$, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme]

1. $\mathscr{L}(E,F)$: ensemble des applications linéaires de E dans F.
2. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijective, f s'appelle un isomorphisme.
3. $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$. Un élément de $\mathscr{L}(E)$ s'appelle un endomorphisme.
4. Un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ s'appelle un automorphisme.

B) Application linéaire

■ Définition 2 .... [Application linéaire]

Une application $f : E \to F$ entre deux $\mathbf{K}$-ev est linéaire si pour tous vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de E et $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$f(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + \lambda f(\mathbf{v}).$$

Ce qui signifie que l'image d'une combinaison linéaire quelconque est la combinaison linéaire des images.

■ Proposition 1 .... [Opérations]

1. Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire : $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.
2. Une composée d'applications linéaires est linéaire.
3. Si une application linéaire est bijective, sa bijection réciproque aussi.

■ Exemple 1.

Exemples universels, et donc triviaux (on retrouve ces applications linéaires dans tous les espaces vectoriels que l'on veut) :

1. L'application nulle
$$0 \ : \ \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{0} \end{array}$$
est linéaire.
2. L'identité de E :
$$\mathrm{Id}_E \ : \ \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \end{array}$$
) endom
est linéaire.
3. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. L'homothétie de rapport λ de E :
$$\lambda \mathrm{Id}_E \ : \ \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ \mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x} \end{array}$$
) automorphisme pour $\lambda \neq 0$.
aussi.

C) Exemples classiques d'applications linéaires

- **Dans les espaces vectoriels de fonctions**

1. Multiplication par une fonction $\mathbf{g}$ donnée : Si $\mathbf{g} \in E = \mathscr{C}^0(I)$: $M_g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \mathbf{f} & \mapsto & \mathbf{gf} \end{array}$

2. Composition à droite par une fonction $\mathbf{g}$ donnée : Si $\mathbf{g} \in E = \mathscr{C}^0(I)$: $Cg : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \mathbf{f} & \mapsto & \mathbf{f} \circ \mathbf{g} \end{array}$

3. Dérivation des fonctions ($k \in \mathbf{N}^\star$, ou $k = \infty$ mais avec dans ce dernier cas la convention $k - 1 = \infty$) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^k(I) & \longrightarrow & \mathscr{C}^{k-1}(I) \\ \mathbf{f} & \mapsto & \mathbf{f}' \end{array}.$$

- **Dans les espaces vectoriels de polynômes**

1. Composition à droite par un polynôme $\mathbf{Q}$ donné : Si $\mathbf{Q} \in \mathbf{K}[X]$ est fixé :

$$T_{\mathbf{Q}} : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ \mathbf{P} & \mapsto & \mathbf{P} \circ \mathbf{Q} \end{array}$$

(cas classique : $\mathbf{Q} = \mathbf{X} + \mathbf{1}$, et dans ce cas $T_{\mathbf{Q}}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} + \mathbf{1})$)

classique et redouté à l'oral

2. La multiplication par un polynôme $\mathbf{Q}$ fixé :

$$M_Q : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ \mathbf{P} & \mapsto & \mathbf{QP} \end{array}$$

3. La dérivation des polynômes :

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ \mathbf{P} & \mapsto & \mathbf{P}' \end{array}$$

(ici, $I = \mathbf{R}$ et D est la restriction de $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ à $\mathbf{R}[X] \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$).

$\mathbf{T}_{14 \cdot 1}$ Montrer qu'une application f est linéaire/un endomorphisme

1. On applique dans la plupart des cas la **Déf. 2**.
2. Souvent, les applications linéaires f étudiées sont des combinaisons linéaires et composées de ces applications classiques. On peut donc au lieu d'appliquer **Déf.2** à f, se contenter d'établir que ces dernières sont linéaires par **Déf. 2** et on utilise **Prop. 1**.

   pour les algébristes. Pas un attendu du concours

3. Si on doit prouver en plus que f est un endomorphisme de E, on ne doit pas oublier de prouver si $\mathbf{u}$ est un vecteur de E, alors $f(\mathbf{u})$ est aussi dans E.

■ Exercice 1.
Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : P \mapsto X^2 P' + 3P$ (de $\mathbf{R}[X]$ dans lui-même).
2. $f_2 : P \mapsto X^2 P' + 3P$ (de $\mathbf{R}_2[X]$ dans $\mathbf{R}_3[X]$).

Exercice 1

ev : $\mathbb{R}[X]$
Vecteur = polynôme

$$f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto X^2P' + 3P \end{array}$$

Je montre que f_1 est linéaire :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Montrons que $f_1(P+\lambda Q) = f_1(P) + \lambda f_1(Q)$

$$\begin{aligned} f_1(P+\lambda Q) &= X^2(P+\lambda Q)' + 3(P+\lambda Q) \\ &= X^2(P' + \lambda Q') + 3P + \lambda \cdot 3Q \\ &= X^2P' + \lambda X^2 Q' + 3P + \lambda \cdot 3Q \\ &= X^2P' + 3P + \lambda(X^2Q' + 3Q) \\ &= f_1(P) + \lambda f_1(Q). \end{aligned}$$

Ceci prouve que f_1 est linéaire.

- Reste à vérifier que f_1 est « endo » : si
P est un polynôme à coeffs réels, $f_1(P)$ aussi

$$f_1(P) = \underbrace{\underbrace{X^2 \underbrace{P'}_{\text{polynôme}}}_{\text{produit de poly.}} + \underbrace{3P}_{\text{polynôme}}}_{\text{CL. de polynômes à coeffs réels}}$$

∎

passer en 1ère lecture

preuve niveau 2 : La multiplication à gauche par le polynôme X^2 est linéaire (vu dans les exemples). Je la note M.

Ainsi $f_1 = M \circ \frac{d}{dx} + 3Id_{\mathbb{R}[X]}$.

en tant que somme et composée d'applications linéaires, f_1 est linéaire.

rem : $T_1 = M \circ \frac{d}{dX} \neq \frac{d}{dX} \circ M = T_2$

question : calculer $T_1(P)$ et $T_2(P)$, $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$T_1(P) = X^2P'$$

$$T_2(P) = (X^2P)' = 2XP + X^2P'$$

2_. On a déjà vu que f_2 est linéaire car $f_1(P) = f_2(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

provient du CH 6

• une chose à vérifier en plus :

si $\deg(P) \leq 2$, $\deg(f_2(P)) \leq 3$.

$\deg(P') \leq 1$

donc $\deg(X^2P') \leq 3$, et $\deg(3P) = \deg P \leq 2$

donc par somme $\boxed{\deg(f(P)) \leq 3.}$

donc f_2 opère bien de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}_3[X]$

D) Noyau - injectivité

■ Définition 3 .... [Noyau]
Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\ker f$ et l'ensemble des solutions $\mathbf{u} \in E$ de l'équation linéaire homogène

$$(H) \qquad f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

■ Remarque 1.

1. L'équation (H) est une équation linéaire vectorielle, c'est-à-dire que l'inconnue est un vecteur.
2. Ainsi $\ker f = \{\mathbf{u} \in E \quad | \quad f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$.

■ Proposition 2 .... [Propriétés du noyau]
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. $\ker f$ est un sev de E.
2. f est injective si et seulement si la seule solution de l'équation $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ est $\mathbf{0}$, c-à-d si et seulement si $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.
3. f est injective si et seulement si pour tout second membre $\mathbf{v} \in F$, l'équation $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ a **au plus** une seule solution. poreq.

T14·2 **Calculer le noyau de $f \in \mathscr{L}(E,F)$**

1. La recherche du noyau consiste par définition en la résolution de l'équation linéaire homogène $f(\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (soit un système linéaire, soit une équation différentielle linéaire homgène, la recherche de polynômes, de matrices etc.)
2. Si on est en dimension finie et que l'on dispose de bases de E et F, on peut analyser matriciellement le noyau **T14·7**.

■ Exemple 2.
Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$, et $f : P \mapsto P'$. Déterminer le noyau de f. Étudier l'injectivité de f.

T14·3 **Montrer que $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective**

On calcule le noyau **T14·2** et on prouve que la seule solution de l'équation $f(\mathbf{u}) = 0$ est $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Matriciellement (**T14·2 2.**), cela revient à prouver que la matrice de f est de rang p avec les notations de **T14·6**

■ Exercice 2.

1. Soit $T : \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}), y \mapsto y' - 2y$. Déterminer le noyau de T.

E) Image - surjectivité

■ Définition 4 .... [Image d'une application linéaire]
Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble valeurs prises par f : $\operatorname{Im} f = \{f(\mathbf{u}) \quad \mathbf{u} \in E\}$. poram.

$$\begin{array}{ccc} f : E & \longrightarrow & F \\ \cup & & \cup \\ \operatorname{Ker} f & & \operatorname{Im} f \\ \text{pareq} & & \text{param} \end{array}$$

Exercice 2 : $T : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$

$y \longmapsto y' - 2y$

vecteur = fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$

Par politesse, commençons par montrer que

$$\underbrace{T \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}))}$$

traduction : T est un endom. de $C^\infty(\mathbb{R})$

- évident que si $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ $y' - 2y$ aussi puisque la dérivée d'une fonction C^∞ est C^∞, et $\underbrace{C^\infty \text{ est un espace vectoriel}}$.

sert à justifier que une CL de fonctions C^∞ est C^∞.

- Linéarité $T = \frac{d}{dx} - 2Id$ + thm 1.

Noyau ? $\operatorname{Ker} T = \{ y \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid y' - 2y = 0 \}$

= ens des solutions d'une EDL$_1$ hom à coeffs constants.

On obtient Ker T en résolvant cette ED.

Les solutions sont les fonctions $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto k e^{2t}$, $k \in \mathbb{R}$

$\operatorname{Ker} T = \{ t \mapsto k e^{2t} \quad k \in \mathbb{R} \}$ devenu param

(normal, on a résolu).

$= \operatorname{Vect}(f_1)$ où $f_1 : t \mapsto e^{2t}$

T n'est pas injective car $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$

Exemple 2 :

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$
$$P \longmapsto P'$$

$$\operatorname{Ker} f \underset{\text{def}}{=} \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P' = 0 \}$$

$$= \{ \text{polynômes constants} \}$$

$$= \mathbb{R}_0[X]$$

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(\mathbb{1})$$

base canonique de $\mathbb{R}_0[X]$

$\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective

Rappel : Soit A et B et $\varphi : A \to B$

φ est injective :

$\forall y \in B$ l'équation $\varphi(x) = y$ a au maximum $\underline{1}$ solution dans A

$$\varphi(x) = \varphi(x') \Rightarrow x = x'$$

« en gros injectif = dans $\varphi(a) = \varphi(b)$ on peut "simplifier par φ" »

■ Proposition 3 .... [Propriétés de l'image]

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. $\operatorname{Im} f$ est un sev de F.
2. f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.
3. f est surjective si et seulement si pour tout second membre $\mathbf{v} \in F$, l'équation $f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ a **au moins** une solution u dans E.

T14·4 **Calculer l'image de $f \in \mathscr{L}(E, F)$**

1. La recherche d'une base de l'image n'est pas immédiate en générale, ni forcément simple car cet ensemble est [param].
2. Néanmoins, si on est en dimension **finie** et que l'on dispose de **bases**, on peut analyser matriciellement l'image **T14·7**.

■ Exemple 3.

Dans $E = \mathbf{R}_3[X]$, si $f : \mathbf{P} \mapsto \mathbf{P}'$, f n'est pas surjective puisque si $\mathbf{P} \in E$ le degré de $f(\mathbf{P})$ est au plus 2, donc l'équation $f(\mathbf{P}) = \mathbf{Q}$ n'a pas de solution dans E pour le second membre $\mathbf{Q} = \mathbf{X}^3$ par exemple.

F) Bijectivité

■ Définition 5 .... [Bijectivité]

$f \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective si elle est injective et surjective.

2 Cas de la dimension finie

~~**■ Théorème 1** .... [Rigidité]~~

A) Matrice d'une application linéaire sur des bases

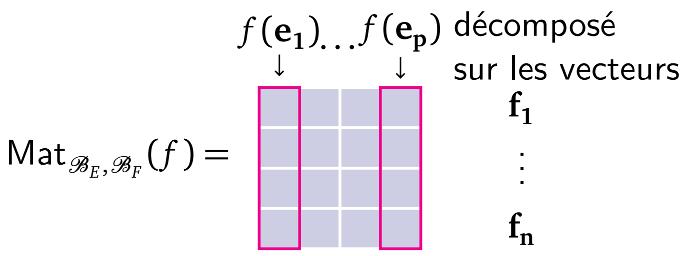
■ Définition 6 .... [Matrice d'une application linéaire sur des bases données]

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie respectivement p et n. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B}_E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_\mathbf{p})$, et $\mathscr{B}_F = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_\mathbf{n})$, des bases respectives de E et F. La matrice de f sur les bases $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F$ est la matrice dont la j-ème colonne est celle des coordonnées du vecteur $f(\mathbf{e}_\mathbf{j})$ décomposé sur la base $\mathscr{B}_F$

106, 111, 113

T14·5 **Écrire la matrice A de $f \in \mathscr{L}(E,F)$ sur des bases données**

1. On applique **Déf. 6** Pour cela, avec les notations de **Déf. 6** :
   - **a)** La matrice possède p colonnes et n lignes.
   - **b)** On calcule $f(\mathbf{e_1}),\dots,f(\mathbf{e_p})$.
   - **c)** On décompose ce qui vient d'être calculé sur $\mathscr{B}_F$.
2. On recopie les coordonnées obtenues sur cette décomposition en colonnes, ce qui donne la matrice cherchée :



■ Exemple 4. oral a gro (sauf que c'était $\mathbb{R}_n[X]$)
Si $\Delta : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ est définie par : $\Delta(\mathbf{P}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}+\mathbf{1}) - \mathbf{P}$, donner sa matrice A sur les bases canoniques.

■ Corollaire 1 .... [*Égalité de deux app. lin*]
Deux applications linéaires ayant les mêmes matrices sur des bases données sont égales.

■ Définition 7 .... [Application linéaire canoniquement associée à une matrice]
Inversement , si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, A peut être vue comme la matrice de l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ dont la matrice sur les bases canoniques est A.

B) Analyse matricielle du noyau

■ Théorème 2 .... [*Base du noyau*]
Avec les notations de `Déf.6` Un système d'équations du noyau de f, et donc une base de ce dernier (**en coordonnées**) s'obtient à partir du système linéaire $(A|0)$, et f est injective ssi $\underbrace{\mathrm{rg}\, A}_{\text{= colonnes de A libres}} = p$.

■ Exemple 5.
Calculer le noyau de Δ de l'**Exemple 4.**

C) Analyse matricielle de l'image

■ Théorème 3 .... [*Base de l'image*]
Avec les notations de `Déf.6`, une famille génératrice de l'image de f est donnée (**en coordonnées**) par les colonnes de A. En extrayant de cette famille une famille libre, on en tire une base de l'image de f, et f est surjective ssi rg A=n.

■ Exemple 6.
Reprenons **Exple 4.** Déterminer L'image de Δ.

D) Rang. Théorème du rang

■ Définition 8 .... [Rang d'une application linéaire]
Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

Image et noyau de Δ :

T

Illustration dif 7.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ 3 \\ \downarrow \end{matrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

$\leftarrow 2 \rightarrow$

Cette matrice représente <u>par défaut</u>
on dit canoniquement

l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ agit ainsi :}$$

Notons $e_1 = (1,0)$ $\quad \varepsilon_1 = (1,0,0)$
$e_2 = (0,1)$ $\quad \varepsilon_2 = (0,1,0)$
$\varepsilon_3 = (0,0,1)$

Base canonique de $\mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{B}_2 = (e_1, e_2)$
$\mathbb{R}^3$ $\quad \mathcal{B}_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

$$\left.\begin{aligned} f(e_1) &= \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 \\ f(e_2) &= 4\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 \end{aligned}\right] \text{ obtenu par lecture en colonnes.}$$

Colonnes : donnent les images des vecteurs de base

Lecture en ligne :

dit que si $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur quelconque :

$f(u)$ en coordonnées est : $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x + 4y \\ 2x + 5y \\ 3x + 6y \end{pmatrix}$$

revenant en vecteurs :

$$f(u) = (x+4y,\ 2x+5y,\ 3x+6y) \in \underline{\underline{\mathbb{R}^3}}$$

preuve corollaire 1.

Soit $f : E \to F \quad g : E \to F$

E et F équipés de bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$

Mettons que $\underbrace{\underset{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}{\mathrm{Mat}}(f)}_{A} = \underbrace{\underset{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}{\mathrm{Mat}}(g)}_{B}$

Montrons que : $f = g$

Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$.

Puisque $A = B \qquad f(e_j) = g(e_j) \ \forall j$ (Def 6)

Par linéarité :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \quad f\Big(\underbrace{\sum \lambda_j e_j}_{x}\Big) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(e_j)$$

$$= \sum_j \lambda_j g(e_j)$$

$$= g\Big(\underbrace{\sum \lambda_j e_j}_{x}\Big)$$

quand les λ_j décrivent $\mathbb{K}$, x décrit E puisque $\mathcal{B}_E$ est une base :

$$\forall x \in E \quad f(x) = g(x)$$

C'est la définition de $f = g$ ∎

Exemple 4

ev : $\mathbb{R}_2[X]$
vecteur = poly. de deg ≤ 2

Base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$: $(\mathbb{1}, X, X^2)$

$\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$

Format de la matrice Δ :

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$P(X+1)$ ← composée de 2 polynômes.

$P \circ Q \overset{\text{notation}}{=} P(Q)$

$$\Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1}(X+1) - \mathbb{1}$$
$$= \mathbb{1} - \mathbb{1} = 0.$$

$\mathbb{1} : x \xmapsto{\mathbb{1}} 1$ $\quad X+1 : t \longmapsto t+1$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{1} \circ (X+1)(t) = \mathbb{1}(t+1) = 1$$

$$\mathbb{1}(X+1) = \mathbb{1} \qquad 1$$

$$\Delta(X) = X + \mathbb{1} - X = \mathbb{1}$$

$$\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + \mathbb{1}$$

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}_c} \Delta = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \mathbb{1} \\ X \\ X^2 \end{array}$$

■ Théorème 4 .... [*Calcul du rang*]
Avec les notations de la définition `Déf. 6`, le rang de f est celui de A.

■ Théorème 5 .... [*Théorème du rang*]
Si E est de dimension finie, et si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et :

$$\dim \ker f + \operatorname{rg} f = \dim E.$$

T14·6

Noyau d'une matrice de petit format

Les combinaisons linéaires de colonnes permettent rapidement de trouver des vecteurs du noyau. Cette technique, combinée au théorème du rang, permet rapidement de trouver une base du noyau.

T14·7

Traitement matriciel des applications linéaires

1. On écrit la matrice de F sur des bases bien choisies ou données avec **T14·5**
2. Calcul du noyau : utiliser **Thm. 1**
3. Calcul de l'image : utiliser **Thm. 2**
4. ☠ Dans les deux cas, ne pas oublier de **reconvertir en vecteurs** dans la réponse finale les colonnes calculées, qui ne sont que les *coordonnées* des vecteurs sur les bases de travail, et pas les *vecteurs eux-mêmes*. On conclura toujours en écrivant : «*en revenant aux vecteurs :*...» et on contrôlera que les vecteurs écrits sont bien des vecteurs :
   — de E pour le calcul du noyau.
   — de F pour le calcul de l'image.

■ Exemple 7.
Dans le précédent exemple, on voit que $\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$, donc $\mathbf{1}$ est dans le noyau de l'endomrphisme Δ. Comme A est visiblement de rang 2, Δ est de rang 2 (`Thm. 5`). Avec le théorème du rang, $\ker \Delta$ est de dimension $3-2=1$. Comme on a trouvé un vecteur non nul du noyau, il en constitue une base donc une base de $\ker \Delta$ est la famille $(\mathbf{1})$.

■ Théorème 6 .... [*Caractérisation des isomorphismes en dimension finie*]

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Si $\dim E > \dim F$, f ne peut être injective.
2. Si $\dim E < \dim F$, f ne peut être surjective.
3. Si $\dim E = \dim F$, sont équivalents :
   a) f est injective.
   b) f est surjective.
   c) f est bijective.

Exemples 5 et 6

$\Delta : P \longmapsto P\circ Q - P$ où $Q = X+1$

$\underset{E}{\mathbb{R}_2[X]} \longrightarrow \underset{F}{\mathbb{R}_2[X]}$

Δ : endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ donc

$\boxed{\text{vecteur de } E = \text{poly de degré} \leq 2 \quad F = \text{vecteur de } E \text{ car } E=F}$

Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}c}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Noyau : $rg(A) = 2$ donc d'après le thm du rang $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1$.

T147

$\to$ il suffit d'un vecteur non nul de Ker A pour obtenir une base de Ker A.

Or col $1 = 0$ donc $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A$.

Comme $E_1 \neq 0$, c'en est une base.

En coordonnées : $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}(E_1)$

Revenant aux vecteurs :

$\mathrm{Ker}\, \Delta = \mathrm{Vect}(1)$

Étude de $\mathrm{Im}\, \Delta$:

En coordonnées, Im A est engendrée par les colonnes de A

$\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

En revenant aux vecteurs :

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(0, 1, 1+2X)$

$= \mathrm{Vect}(1, 1+2X)$

$= \mathrm{Vect}(1, 2X)$

$= \mathrm{Vect}(1, X)$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}_1[X]$

3 Changement de base entre espaces de dimension finie

■ Théorème 7 .... [*Formule du changement de base*]
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n > 0$, dont $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases. Soit A (resp. A') la matrice de f sur la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$) et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors A et A' sont liées par : $A' = P^{-1}AP$

■ Corollaire 2 .... [*Interprétation*]
Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme mais écrit sur des bases différentes. Elles ont donc le **même spectre**.

4 Diagonalisation

A) Valeurs propres

■ Définition 9 .... `[valeur propre - vecteur propre associé]`

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On appelle valeur propre de f tout scalaire λ pour lequel l'équation suivante, appelée équation aux valeurs propres, admet une solution u **non nulle** :

$$f(u) = \lambda u.$$

■ Exemple 8.
Valeurs propres de la dérivation. On considère l'endomorphisme de $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$ défini par :

$$D(u) = u'.$$

[2e

L'équation aux valeurs propres de la dérivation est :

$$D(u) = \lambda u \quad \text{inconnue :}$$

et λ est un paramètre.

On cherche pour quelles valeurs de λ cette équation admet une solution non nulle.

■ Définition 10 .... `[Spectre d'un endomorphisme]`
On appele spectre d'un endomorphisme f l'ensemble de ses valeurs propres. On le note $\mathrm{Sp}(f)$, ou $\mathrm{Spec}(f)$ ou encore $\sigma(f)$.

B) Sous-espaces propres

■ Définition 11 .... `[Sous-espace propre associé à une valeur propre]`
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ et λ une valeur propre de f. On appelle sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ l'ensemble noté E_λ et défini par :

$$E_\lambda := \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

<u>Rem</u> : 1ère formule du chgt de bases :

$X = PX'$ sert pour $X =$ 

2e . . . .

$A' = P^{-1}AP$ sert pour $A =$ 

$$
\begin{tikzcd}
& E \arrow[loop right, "f"] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B \arrow[d] & & B' \arrow[d] \\
A & & A'
\end{tikzcd}
$$

■ Proposition 4 .... [Propriétés des sous-espaces propres]
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Les sous-espaces propres de f sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. $u \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow f(u) = \lambda u$.
3. Les éléments du sous-espace E_λ sont les vecteurs propres associés à la valeur propre λ auxquels on a ajouté le vecteur nul 0.
4. Les sous-espaces propres sont de dimension au moins 1. En particulier, λ n'est pas une valeur propre si et seulement si $E_\lambda = \{0\}$.
5. Le noyau de f est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
6. ~~Les sous-espaces propres associés à une valeur propre **non nulle** sont inclus dans l'image de f.~~
7. Les sous-espaces propres de f sont stables par f :

$$\forall \lambda \in \sigma(f) \quad \forall u \in E \quad u \in E_\lambda \Rightarrow f(u) \in E_\lambda.$$

passer un vecteur

C) Valeurs propres et indépendance linéaire

■ Théorème 8 .... [*Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes*]
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $p \geq 1$. Si $u_1, \dots, u_p$ sont p vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est libre.

■ Corollaire 3 .... [*Intersection des sous-espaces propres*]
Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes n'ont que le vecteur nul comme vecteur en commun :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2 \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$$

■ Corollaire 4 .... [*Sert dans tous les exercices*]
En juxtaposant des bases (ou simplement des familles libres) de sous-espaces propres deux à deux distincts d'un endomorphisme (ou d'une matrice), on obtient encore une famille libre.

5 Diagonalisation en dimension finie

Si on dispose d'une base de E, diagonaliser un endomorphisme de E équivaut à diagonaliser sa matrice.

A) Nombre de valeurs propres

■ Corollaire 5 .... [*Nombre de valeurs propres en dimension finie*]
Soit $n > 0$ un entier. Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et si f est un endomorphisme de E, alors f possède au plus n valeurs propres distinctes.

■ Exemple 9.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{K}_2[X]$ dont la matrice est donné par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

On note $F = \ker(f - \mathrm{Id})$ et $G = \ker(f + \mathrm{Id})$

1. Donner des bases de F et G.
2. Justifer que la juxtaposition de ces bases donne une base de $\mathbf{K}_2[X]$.
3. Donner la matrice de f sur cette nouvelle base.

■ Corollaire 6
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit f un endomorphisme de E. Notons A la matrice de f sur la base $\mathscr{B}$. Sont équivalents :

1. A est diagonale.
2. $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres de f.

■ Définition 12 .... [Diagonalisabilité]
Soit $n > 0$ un entier, E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $f \in \mathscr{L}(E)$.
On dit que f est diagonalisable si il existe une base $\mathscr{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f.

B) Critère de diagonalisabilité

■ Théorème 9 .... [*Caractérisation de la diagonalisabilité*]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit f un endomorphisme de E. Sont équivalents :

1. f est diagonalisbale.
2. La somme des dimensions des sev propres de f vaut au moins n.

En particulier, si f admet exactement n valeurs propres distinctes :

1. f est diagonalisable.
2. Les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.